TD2 : Plus d'applications linéaires : noyaux et images

Exercice 1:

Soit

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2\\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (x_1 + x_2 + x_3, -x_1 + 2x_2 + 2x_3)\end{aligned}$$

On appelle (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (f_1, f_2) celle de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Donner la dimension et une base de $\ker \varphi$, et la dimension et une base de $\mathrm{Im}\,(\varphi)$.

Exercice 2:

Même exercice avec

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2\\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (-2x_1 + x_2 + x_3, x_1 - 2x_2 + x_3)\end{aligned}$$

Exercice 3:

Soit

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2\\ (x, y) &\mapsto (x - y, -3x + 3y)\end{aligned}$$

On admet que f est linéaire.

1. Montrer que f n'est ni surjective, ni injective.
2. Trouver une base de l'image et du noyau.

Exercice 4:

Encore pareil avec

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3\\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (x_1 - x_3, 2x_1 + x_2 - 3x_3, -x_2 + 2x_3)\end{aligned}$$

Exercice 5:

Encore pareil avec

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}^3\\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\mapsto (x_1 + x_2, x_3 + x_4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\end{aligned}$$

Exercice 6:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Encore pareil avec

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}\\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i\end{aligned}$$