Applications linéaires

Marc CHEVALIER
DI ENS
sur une idée originale de Jérôme FERET

19 mars 2018

1 Définitions

Définition 1 – Applications linéaires

Soit $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application linéaire de $(E, +_E, \bullet_E)$ dans $(F, +_F, \bullet_F)$ est une fonction φ de E dans F qui vérifie les deux propriétés suivantes :

1. *(additivité)* $\forall u, v \in E$, on a : $\varphi(u +_E v) = \varphi(u) +_F \varphi(v)$;
2. *(homogénéité)* $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall u \in E$, on a : $\varphi(\lambda \bullet_E u) = \lambda \bullet_F \varphi(u)$.

L'ensemble des applications linéaires de $(E, +_E, \bullet_E)$ dans $(F, +_F, \bullet_F)$ est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Définition 2 – Endomorphismes

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une application linéaire de $(E, +, \bullet)$ dans $(E, +, \bullet)$ dans lui même est appelée un endomorphisme.
L'ensemble des endomorphismes de $(E, +, \bullet)$ est noté $\mathcal{L}(E)$.

Définition 3 – Isomorphismes

Un isomorphisme est une application linéaire bijective.
L'ensemble des isomorphismes entre un espace vectoriel $(E, +_E, \bullet_E)$ et un autre $(F, +_F, \bullet_F)$ est noté $\mathrm{Isom}(E, F)$.

Définition 4 – Automorphismes

Un automorphisme est un homomorphisme bijectif. L'ensemble des automorphismes d'un espace linéaire $(E, +, \bullet)$ est noté $\mathcal{GL}(E)$.

Définition 5 – Forme linéaire

Une application linéaire d'un espace dans l'espace $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ est appelée une forme linéaire.

Exemple 1

Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors la fonction φ de E dans F qui associe à tout vecteur $u \in E$ le vecteur 0_F est une application linéaire.

Démonstration. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors la fonction φ de E dans F qui associe à tout vecteur $u \in E$ le vecteur 0_F.

— φ est une fonction de E dans F.

— Soient $u, v \in E$. On a : $\varphi(u +_E v) = 0_F$, puis $0_F = 0_F +_F 0_F$, et $0_F +_F 0_F = \varphi(u) +_F \varphi(v)$. Donc $\varphi(u +_E v) = \varphi(u) +_F \varphi(v)$.

— Soient $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a : $\varphi(\lambda \bullet_E u) = 0_F$, puis $0_F = \lambda \bullet_F 0_F$, et $\lambda \bullet_F 0_F = \lambda \bullet \varphi(u)$. Donc $\varphi(\lambda \bullet_E u) = \lambda \bullet_F \varphi(u)$.

□

Exemple 2

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors la fonction Id_E est un automorphisme de E.

Démonstration. Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

— La fonction Id_E est une fonction de E dans E.

— La fonction Id_E est une bijection.

— Soit $u \in E, v \in E$,
on a : $Id_E(u + v) = u + v$; or $Id_E(u) = u$ et $Id_E(v) = v$. et $\lambda \in \mathbb{K}$; donc $Id_E(u + v) = Id_E(u) + Id_E(v)$.

— Soit $u \in E$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$,
on a : $Id_E(\lambda \bullet u) = \lambda \bullet u$; or $Id_E(u) = u$; donc $Id_E(\lambda \bullet u) = \lambda \bullet Id_E(u)$.

Donc $Id_E \in \mathcal{GL}(E)$. □

Exemple 3

La fonction φ définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}^2 &\to \mathbb{K}^2 \\ (x,y) &\mapsto (y,x) \end{aligned}$$

est un automorphisme de $(K^2, \dot{+}, \dot{\bullet})$

Exemple 4

La fonction φ définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}^2 &\to \mathbb{K} \\ (x,y) &\mapsto x + 2 \cdot y \end{aligned}$$

est une forme linéaire de $\mathbb{K}^2$.

Exemple 5

La fonction *diff* définie par :

$$\begin{aligned} \mathit{diff} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\to \mathcal{F}(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto f' \end{aligned}$$

est une application linéaire de l'espace des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de l'addition et du produit externe point à point, dans l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de l'addition et du produit externe point à point.

Exemple 6

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. La fonction $\int_I$ de l'espace des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ intégrables muni de l'addition et du produit externe point à point dans l'espace $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, et qui associe à toute fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ intégrable, le réel $\int_I f$, est une application linéaire.

Exemple 7

Toute fonction φ de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$, qui vérifie $\varphi(q+q') = \varphi(q) + \varphi(q')$ est une forme linéaire.

Démonstration. En exercice □

Proposition 1

Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et φ une application linéaire de E dans F. Alors $\varphi(0_E) = 0_F$.

Démonstration. Soit $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On a $0_E = 0 \bullet_E 0_E$.
Puis $\varphi(0_E) = \varphi(0 \bullet_E 0_E)$.
Et par la définition 1.(2), $\varphi(0_E) = 0 \bullet_F \varphi(0_E)$.
Puis $0 \bullet_F \varphi(0_E) = 0_F$.
Donc $\varphi(0_E) = 0_F$. □

Proposition 2

Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et φ une application linéaire de E dans F. Soit $u \in E$, Alors $\varphi(-_E u) = -_F \varphi(u)$.

Démonstration. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et φ une application linéaire de E dans F. Soit $u \in E$.
Puis, on a $u +_E (-_E u) = 0_E$.
Or, comme $u +_E (-u) = 0_E$ et par la propriété 1, $\varphi(u +_E (-_E u)) = 0_F$.
D'autre part, par la définition 1.(1), on a : $\varphi(u +_E (-_E u)) = \varphi(u) +_F \varphi(-_E u)$.
D'où :$\varphi(u) +_F \varphi(-_E u) = 0_F$.
Donc, $-_F \varphi(u) = \varphi(-_E u)$. □

Proposition 3

Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et φ une fonction de E dans F. Alors φ est une application linéaire de $(E, +_E, \bullet_E)$ dans $(F, +_F, \bullet_F)$ si et seulement si, pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, tout couple de vecteurs $(u, v) \in E^2$, on a : $\varphi(u +_E \lambda \bullet_E v) = \varphi(u) +_F \lambda \bullet_F \varphi(v)$.

Démonstration. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit φ une fonction de E dans F.

— $(\Rightarrow)$ On suppose que φ est une application linéaire.
  Soit $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
  Par la définition 1.(1), on a : $\varphi(u +_E \lambda \bullet_E v) = \varphi(u) +_F \varphi(\lambda \bullet_E v)$.
  Par la définition 1.(2), on a : $\varphi(\lambda \bullet_E v) = \lambda \bullet_F \varphi(u)$.
  Puis, $\varphi(u +_E \lambda \bullet_E v) = \varphi(u) +_F \lambda \bullet_F \varphi(v)$.

— ($\Leftarrow$) On suppose que φ satisfait $\varphi(u +_E \lambda \bullet_E v) = \varphi(u) +_F \lambda \bullet_F \varphi(v)$, pour tout $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Soient u et v deux vecteurs de E.
   On a $v = 1 \bullet_E v$.
   Puis, $\varphi(u +_E v) = \varphi(u +_E 1 \bullet_E v)$.
   Puis par hypothèse, $\varphi(u +_E 1 \bullet_E v) = \varphi(u) +_F 1 \bullet_F \varphi(v)$.
   Or $\varphi(v) = 1 \bullet_F \varphi(v)$.
   Puis, $\varphi(u) +_F 1 \bullet_F \varphi(v) = \varphi(u) +_F \varphi(v)$.
   Donc, $\varphi(u +_E v) = \varphi(u) +_F \varphi(v)$.
2. Soit $u \in E$ un vecteur et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire.
   On a : $\lambda \bullet_E u = 0_E +_E \lambda \bullet_E u$.
   D'où, $\varphi(\lambda \bullet_E u) = \varphi(0_E +_E \lambda \bullet_E u)$.
   Puis, par hypothèse, $\varphi(0_E +_E \lambda \bullet_E u) = \varphi(0_E) +_F \lambda \bullet_F \varphi(u)$.
   Puis, par la propriété 1, on a $\varphi(0_E) = 0_F$.
   Donc, $\varphi(0_E +_E \lambda \bullet_E u) = 0_F +_F \lambda \bullet_F \varphi(u)$.
   Or par la définition d'un espace vectoriel, $0_F +_F \lambda \bullet_F \varphi(u) = \lambda \bullet_F \varphi(u)$.
   Puis, $\varphi(\lambda \bullet_E u) = \lambda \bullet_F \varphi(u)$.

$\square$

Proposition 4

Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de $(E, +_E, \bullet_E)$ dans $(F, +_F, \bullet_F)$. Alors, φ est injective si et seulement si pour tout vecteur $u \in E$ tel que $\varphi(u) = 0_F$, on a : $u = 0_E$.

Démonstration. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de $(E, +_E, \bullet_E)$ dans $(F, +_F, \bullet_F)$.

— ($\Rightarrow$) On suppose que φ est injective.
  Soit $u \in E$ tel que $\varphi(u) = 0_F$.
  On sait, par la propriété 1, que : $\varphi(0_E) = 0_F$.
  On a donc $x \in E$ et $0_E \in E$ et $\varphi(u) = \varphi(0_E)$.
  Puis comme φ est injective, $u = 0_E$.

— ($\Leftarrow$) On suppose que pour tout $u \in E$ tel que $\varphi(u) = 0_F$, on a : $u = 0_E$.
  Montrons que φ est injective :
  Soient $x, y \in E$ tels que $\varphi(x) = \varphi(y)$. On a : $\varphi(x) -_F \varphi(y) = 0_F$.
  Puis, par la propriété 2, $-_F\varphi(y) = \varphi(-_E y)$.
  Donc, $\varphi(x) +_F \varphi(-_E y) = 0_F$.

Puis, par la définition 1.(1), $\varphi(x -_E y) = 0_F$.
Donc par hypothèse, $x -_E y = 0_E$.
Puis $x = y$.

$\square$

Proposition 5

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors $\mathcal{GL}(E)$ est un groupe pour la composition.

Démonstration. Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

— Montrons que la composition $\circ$ est une loi interne sur $\mathcal{GL}(E)$. Soit $\varphi, \psi \in \mathcal{GL}E$.

 — $\varphi \circ \psi$ est une fonction de E dans E comme composition de fonctions de E dans E.
 — $\varphi \circ \psi$ est une bijection comme composition de bijections.
 — Soient $u \in E$, $v \in E$, et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned}
[\varphi \circ \psi](u + \lambda \bullet v) &= \varphi(\psi(u + \lambda \bullet v) && \text{(par définition de la composition)}\\
[\varphi \circ \psi](u + \lambda \bullet v) &= \varphi(\psi(u)) + \lambda \bullet \varphi(\psi(v))) && \text{(par la propriété 3)}\\
[\varphi \circ \psi](u + \lambda \bullet v) &= [\varphi \circ \psi](u) + \lambda \bullet [\varphi \circ \psi](v) && \text{(par définition de la composition)}
\end{aligned}$$

 Puis, par la propriété 3, la fonction $\varphi \circ \psi$ est une application linéaire.
Donc $\varphi \circ \psi \in \mathcal{GL}E$.

— Soit $\varphi, \psi, \xi \in \mathcal{GL}(E)$.
Montrons que $[\varphi \circ \psi] \circ \xi = \varphi \circ [\psi \circ \xi]$.
$[\varphi \circ \psi] \circ \xi$ et $\varphi \circ [\psi \circ \xi]$ sont deux fonctions de E dans E.
De plus, pour $u \in E$, on a :

$$\begin{aligned}
[[\varphi \circ \psi] \circ \xi](u) &= [\varphi \circ \psi](\xi(u))\\
[[\varphi \circ \psi] \circ \xi](u) &= \varphi(\psi(\xi(u)))\\
[[\varphi \circ \psi] \circ \xi](u) &= \varphi([\psi \circ \xi](u))\\
[[\varphi \circ \psi] \circ \xi](u) &= [\varphi \circ [\psi \circ \xi]](u)
\end{aligned}$$

Donc $[\varphi \circ \psi] \circ \xi = \varphi \circ [\psi \circ \xi]$.

— D'après l'exemple 2, la fonction $Id_E \in \mathcal{GL}(E)$. De plus, on sait que : $\varphi \in \mathcal{GL}(E)$, on a : $\varphi \circ Id_E = \varphi$ et $Id_E \circ \varphi = \varphi$.

— Soit $\varphi \in \mathcal{GL}(E)$. On a $\varphi \circ \varphi^{-1} = Id_E$ et $\varphi^{-1} \circ \varphi = Id_E$. Montrons que $\varphi^{-1} \in \mathcal{GL}(E)$.

  — φ^{-1} est une bijection de E dans E.

  — Soit $u \in F$, soit $v \in F$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
  On a :

$$\begin{array}{ll} \varphi^{-1}(u + \lambda \bullet v) = \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(u)) + \lambda \bullet \varphi(\varphi^{-1}(v))) & \text{car } \varphi \circ \varphi^{-1} = Id_E \\ \varphi^{-1}(u + \lambda \bullet v) = \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(u) + \lambda \bullet \varphi^{-1}(v))) & \text{par la propriété 3} \\ \varphi^{-1}(u + \lambda \bullet v) = \varphi^{-1}(u) + \lambda \bullet \varphi^{-1}(v) & \text{car } \varphi^{-1} \circ \varphi = Id_E \end{array}$$

□

Proposition 6

Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors l'ensemble des applications linéaires de $(E, +_E, \bullet_E)$ dans $(F, +_F, \bullet_F)$, muni de la somme $+_F$ point à point et du produit externe $\bullet_F$ point à point, est un espace vectoriel.

Démonstration. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Montrons que $(\mathcal{L}(E, F), \dot{+}_F, \dot{\bullet}_F)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(E, F), \dot{+}_F, \dot{\bullet}_F)$.

— $(\mathcal{F}(E, F), \dot{+}_F, \dot{\bullet}_F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

— On a : $\mathcal{L}(E, F) \subseteq \mathcal{F}(E, F)$.

— Par l'exemple 1, la fonction constante de E dans F, qui à tout élément $u \in E$ associe 0_F est une application linéaire de E dans F.

— Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E, F)$.
$\varphi \dot{+}_F \psi$ est une fonction de E dans F.
De plus, pour $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{array}{ll} [\varphi \dot{+}_F \psi](u +_E \lambda \bullet_E v) = \varphi(u +_E \lambda \bullet_E v) +_F \psi(u +_E \lambda \bullet_E v) & \\ [\varphi \dot{+}_F \psi](u +_E \lambda \bullet_E v) = \varphi(u) +_F \lambda \bullet_F \varphi(v) +_F \psi(u) +_F \lambda \bullet_F \psi(v) & \text{(par la propriété 3)} \\ [\varphi \dot{+}_F \psi](u +_E \lambda \bullet_E v) = \varphi(u) +_F \psi(u) +_F \lambda \bullet_F (\varphi(v) +_F \psi(v)) & \\ [\varphi \dot{+}_F \psi](u +_E \lambda \bullet_E v) = [\varphi \dot{+}_F \psi](u) +_F \lambda \bullet_F [\varphi \dot{+}_F \psi](v) & \end{array}$$

— Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \dot{\bullet}_F \varphi$ est une fonction de E dans F.
De plus, pour $u, v \in E$ et $\mu \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{array}{ll} [\lambda \dot{\bullet}_F \varphi](u +_E \mu \bullet_E v) = \lambda \dot{\bullet}_F \varphi(u +_E \mu \bullet_E v) & \\ [\lambda \dot{\bullet}_F \varphi](u +_E \mu \bullet_E v) = \lambda \dot{\bullet}_F (\varphi(u) +_F \mu \bullet_F \varphi(v)) & \text{(par la propriété 3)} \\ [\lambda \dot{\bullet}_F \varphi](u +_E \mu \bullet_E v) = \lambda \bullet_F \varphi(u) +_F \mu \bullet_F (\lambda \bullet_F (\varphi(v))) & \\ [\lambda \dot{\bullet}_F \varphi](u +_E \mu \bullet_E v) = [\lambda \dot{\bullet}_F \varphi](u) +_F \mu \bullet_F [\lambda \dot{\bullet}_F \varphi](v) & \end{array}$$

Donc $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$. Donc, $\mathcal{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $\square$

2 Image des familles de vecteurs

Proposition 7

L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est une famille libre.

Démonstration. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, soit φ une application linéaire injective entre $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$, soient I un ensemble et $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille libre d'éléments de E indexée par I.
Soit $J \subseteq I$ un sous-ensemble fini de I et $(\lambda_j)_{j \in J} \in F^J$ une famille de scalaires indexée par J et tel que $\sum_{j \in J} \lambda_j \bullet_F \varphi(u_j) = 0_F$.
On a, par linéarité, $\varphi(\sum_{j \in J} \lambda_j \bullet_E u_j) = 0_F$.
Puis par la propriété 1, $\sum_{j \in J} \lambda_J \bullet_E u_j = 0_E$.
Puis par définition d'une famille libre, pour tout $j \in J$, $\lambda_j = 0$.
Donc la famille $(\varphi(u_i))_{i \in I}$ est libre. $\square$

Proposition 8

Une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ est injective si et seulement si l'image de toute famille libre (de E) est une famille libre (de F).

Démonstration. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire.

- ($\Rightarrow$) On suppose que φ est injective.
  Soit I un ensemble et $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille libre.
  Alors par la propriété 7, $(\varphi(u_i))_{i \in I}$ est une famille libre de F.
- ($\Leftarrow$) On suppose que, pour tout ensemble I et toute famille libre $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ d'éléments de E indexée par I, la famille $(\varphi(u_i))_{i \in I}$ est libre.
  Montrons que φ est injective.
  Soient $u \in E$ tels que $\varphi(u) = 0_F$. Il faut montrer que $u = 0_E$.
  Par l'absurde, on suppose que $u \neq 0_E$.
  La famille (u) serait donc une famille libre.
  Puis par hypothèse, la famille $(\varphi(u))$ serait une famille libre.
  Donc $\varphi(u) \neq 0_F$ (ce qui est absurde).
  Donc $u = 0_E$.

□

Proposition 9

Si l'image d'une base par une application linéaire est libre, alors cette application linéaire est injective.

Démonstration. Exercice □

Proposition 10

L'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective est une famille génératrice.

Démonstration. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, soit φ une application linéaire surjective entre $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$, soient I un ensemble et $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille génératrice de E indexée par I.
Soit $u \in F$.
Comme φ est surjective, prenons $v \in E$ tel que $u = \varphi(v)$.
Comme $(u_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E, il existe un sous-ensemble fini $J \subseteq I$ et une famille $(\lambda_j)_{j\in J} \in \mathbb{K}^I$ de scalaires indexée par J, telle que $\sum_{j\in J} \lambda_j \bullet_E u_j = v$.
Puis $\varphi(\sum_{j\in J} \lambda_j \bullet_E u_j) = \varphi(v)$.
D'où $u = \sum_{j\in J} \lambda_j \bullet_F \varphi(u_j)$.
Ainsi, $(\varphi(u_i))_{i\in I}$ est une famille génératrice de F. □

Proposition 11

Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre E et F. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. φ est surjective ;
2. L'image de chaque famille génératrice de $(E, +_E, \bullet_E)$ est une famille génératrice de $(F, +_F, \bullet_F)$;
3. Il existe une famille génératrice de $(E, +_E, \bullet_E)$ dont l'image est une famille génératrice de $(F, +_F, \bullet_F)$.

Démonstration. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre E et F.

— (1. $\Rightarrow$ 2.) D'après la propriété 10, si φ est surjective, alors l'image de chaque famille génératrice de $(E, +_E, \bullet_E)$ est une famille génératrice de $(F, +_F, \bullet_F)$.
— (2. $\Rightarrow$ 3.) On suppose que l'image de chaque famille génératrice E est une famille génératrice de F. La famille $(u)_{u \in E}$ est une famille génératrice de E, donc son image est une famille génératrice de F.
— (3. $\Rightarrow$ 1.) On suppose qu'il existe une famille $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ génératrice de E indexée par un ensemble I, telle que la famille $(\varphi(u_i))_{i \in I}$ soit une famille génératrice de F.
Montrons que φ est surjective.
Soit $u \in F$,
$(\varphi(u_i))_{i \in I}$ est une famille génératrice de F.
Donc soit J un sous-ensemble fini de I et $(\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J$ une famille de scalaires indexée par J et tel que $u = \sum_{j \in J} \lambda_j \bullet_F \varphi(u_j)$.
On a donc, par linéarité, $u = \varphi(\sum_{j \in J} \lambda_j \bullet_F u_j)$.
Ainsi φ est surjective.

□

Théorème 1

Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre E et F. On suppose, de plus, qu'il existe une base de E[a]. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\varphi \in Isom(E, F)$;
2. L'image de chaque base de $(E, +_E, \bullet_E)$ est une base de $(F, +_F, \bullet_F)$;
3. Il existe une base de $(E, +_E, \bullet_E)$ dont l'image est une base de $(F, +_F, \bullet_F)$.

a. C'est toujours vrai, mais on ne l'a prouvé que si $(E, +_E, \bullet_E)$ admet une famille génératrice finie.

Démonstration. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre E et F. On suppose que $(E, +_E, \bullet_E)$ admet une base.
— (1. $\Rightarrow$ 2.) On suppose que φ est bijective.
Soit $(u_i)_{i \in I}$ une base de E indexée par un ensemble I.
La famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre et φ est injective. Donc par la propriété 7, la famille $(\varphi(u_i))_{i \in I}$ est libre.
De plus, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est génératrice et φ est surjective. Donc la propriété 10, la famille $(\varphi(u_i))_{i \in I}$ est génératrice.
Ainsi, la famille $(\varphi(u_i))_{i \in I}$ est une base.

— (2. $\Rightarrow$ 3.) On suppose que l'image de chaque base de $(E, +_E, \bullet_E)$ par φ est une base de $(F, +_F, \bullet_F)$. Or on a supposé qu'il existait une base de $(E, +_E, \bullet_E)$. Donc il existe une base de $(E, +_E, \bullet_E)$ dont l'image par φ est une base de $(F, +_F, \bullet_F)$.

— (3. $\Rightarrow$ 1.) On suppose qu'il existe une base $(b_i)_{i \in I} \in E^I$ de $(E, +_E, \bullet_E)$ indexée par un ensemble I, telle que la famille $(\varphi(b_i))_{i \in I}$ soit une base de $(F, +_F, \bullet_F)$. Montrons que φ est un isomorphisme.

  — La famille $(b_i)_{i \in I}$ est génératrice de $(E, +_E, \bullet_E)$ et la famille $(\varphi(b_i))_{i \in I}$ est génératrice de $(F, +_F, \bullet_F)$, donc par la propriété 11, φ est une fonction surjective.
  Montrons que φ est injective.

  — Soit $u \in E$, tel que $\varphi(u) = 0_F$.
  Comme $(b_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice, on peut choisir K un sous-ensemble fini de I et $(\lambda_k)_{k \in K} \in \mathbb{K}^K$ une famille de scalaires indexée par K, tel que $u = \sum_{k \in K} \lambda_k \bullet_F b_k$.
  Puis $\varphi(u) = \varphi(\sum_{k \in K} \lambda_k \bullet_F b_k)$.
  Puis $0_F = \sum_{k \in K} \lambda_k \bullet_F \varphi(b_k)$.
  Or $(\varphi(b_i))_{i \in I}$ est une famille libre, donc pour $k \in K$, $\lambda_k = 0$.
  Or $u = \sum_{k \in K} \lambda_k \bullet_E b_k$, puis $u = 0_E$.

  Donc $u = 0_E$ et φ est injective.

  Puis φ est un isomorphisme entre $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$.

□

Théorème 2

Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit I un ensemble d'indices et $(u_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de E. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E, F)$ deux applications linéaires de E dans F. Si pour tout indice $i \in I$, $\varphi(u_i) = \psi(u_i)$, alors $\varphi = \psi$.

Démonstration. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit I un ensemble d'indices et $(u_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de E. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E, F)$ deux applications linéaires de E dans F telles que pour tout indice $i \in I$, $\varphi(u_i) = \psi(u_i)$.
φ et ψ sont deux fonctions de E dans F.
De plus, pour $u \in E$,

comme la famille $(u_i)_{i\in I}$ est génératrice, il existe un sous-ensemble $J \in I$ et une famille de scalaires $(\lambda_j)_{j\in J} \in \mathbb{K}^J$ tel que : $u = \sum_{j\in J} \lambda_j \bullet_E u_j$;
puis

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= \varphi(\textstyle\sum_{j\in J} \lambda_j \bullet_E u_j) \\
\varphi(u) &= \textstyle\sum_{j\in J} \lambda_j \bullet_F \varphi(u_j) \\
\varphi(u) &= \textstyle\sum_{j\in J} \lambda_j \bullet_F \psi(u_j) \\
\varphi(u) &= \psi(\textstyle\sum_{j\in J} \lambda_j \bullet_E u_j) \\
\varphi(u) &= \psi(u).
\end{aligned}$$

Ainsi $\varphi = \psi$. □

Théorème 3

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n, alors il existe un isomorphisme entre $(E, +, \bullet)$ et $(\mathbb{K}^n, \dot{+}, \dot{\cdot})$.

Démonstration. En exercice. □

3 Noyau, Image et dimension

Définition 6 – Noyau

Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre E et F.
On définit le noyau de φ, $\operatorname{Ker}(\varphi)$ par :

$$\operatorname{Ker}(\varphi) := \{x \in E \mid \varphi(x) = 0_F\}.$$

Proposition 12

Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre E et F. Alors $\operatorname{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +_E, \bullet_E)$.

Démonstration. En exercice. □

Définition 7 – Image

Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre E et F.

On définit l'image de φ, $\mathrm{Im}(\varphi)$ par :

$$\mathrm{Im}(\varphi) := \{\varphi(x) \in F \mid x \in E\}.$$

Proposition 13

Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre E et F. Alors $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $(F, +_F, \bullet_F)$.

Démonstration. En exercice. □

Théorème 4

Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre E et F. On suppose que $(E, +_E, \bullet_E)$ est de dimension fini. Alors,

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

Démonstration. En exercice. □

Corollaire 1

Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si E ou F est de dimension fini et s'il existe un isomorphisme $\varphi \in Isom(E, F)$, alors E et F sont de dimensions finis et égales.

Démonstration. En exercice. □

Corollaire 2

Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose que $(E, +_E, \bullet_E)$ est de dimension fini. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E dans F.
Les trois assertions suivantes sont équivalents :

1. φ est un isomorphisme ;
2. φ est injectif et $\dim E = \dim F$;
3. φ est surjectif et $\dim E = \dim F$.

Démonstration. En exercice. □