Applications linéaires

Marc CHEVALIER
DI ENS
sur une idée originale de Jérôme FERET

19 mars 2018

1 Définitions

Définition 1 – Applications linéaires

Soit $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application linéaire de $(E, +_E, \bullet_E)$ dans $(F, +_F, \bullet_F)$ est une fonction φ de E dans F qui vérifie les deux propriétés suivantes :

1. *(additivité)* $\forall u, v \in E$, on a : $\varphi(u +_E v) = \varphi(u) +_F \varphi(v)$;
2. *(homogénéité)* $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E$, on a : $\varphi(\lambda \bullet_E u) = \lambda \bullet_F \varphi(u)$.

L'ensemble des applications linéaires de $(E, +_E, \bullet_E)$ dans $(F, +_F, \bullet_F)$ est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Définition 2 – Endomorphismes

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une application linéaire de $(E, +, \bullet)$ dans $(E, +, \bullet)$ dans lui même est appelée un endomorphisme.
L'ensemble des endomorphismes de $(E, +, \bullet)$ est noté $\mathcal{L}(E)$.

Définition 3 – Isomorphismes

Un isomorphisme est une application linéaire bijective.
L'ensemble des isomorphismes entre un espace vectoriel $(E, +_E, \bullet_E)$ et un autre $(F, +_F, \bullet_F)$ est noté $\mathrm{Isom}(E, F)$.

Définition 4 – Automorphismes

Un automorphisme est un homomorphisme bijectif. L'ensemble des automorphismes d'un espace linéaire $(E, +, \bullet)$ est noté $\mathcal{GL}(E)$.

Définition 5 – Forme linéaire

Une application linéaire d'un espace dans l'espace $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ est appelée une forme linéaire.

Proposition 1

Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et φ une fonction de E dans F. Alors φ est une application linéaire de $(E, +_E, \bullet_E)$ dans $(F, +_F, \bullet_F)$ si et seulement si, pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, tout couple de vecteurs $(u, v) \in E^2$, on a : $\varphi(u +_E \lambda \bullet_E v) = \varphi(u) +_F \lambda \bullet_F \varphi(v)$.

Proposition 2

Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de $(E, +_E, \bullet_E)$ dans $(F, +_F, \bullet_F)$. Alors, φ est injective si et seulement si pour tout vecteur $u \in E$ tel que $\varphi(u) = 0_F$, on a : $u = 0_E$.

Proposition 3

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors $\mathcal{GL}(E)$ est un groupe pour la composition.

Proposition 4

Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors l'ensemble des applications linéaires de $(E, +_E, \bullet_E)$ dans $(F, +_F, \bullet_F)$, muni de la somme $+_F$ point à point et du produit externe $\bullet_F$ point à point, est un espace vectoriel.

2 Image des familles de vecteurs

Théorème 1

Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre E et F. On suppose, de plus, qu'il existe une base de E [a]. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\varphi \in Isom(E, F)$;
2. L'image de chaque base de $(E, +_E, \bullet_E)$ est une base de $(F, +_F, \bullet_F)$;
3. Il existe une base de $(E, +_E, \bullet_E)$ dont l'image est une base de $(F, +_F, \bullet_F)$.

a. C'est toujours vrai, mais on ne l'a prouvé que si $(E, +_E, \bullet_E)$ admet une famille génératrice finie.

Théorème 2

Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit I un ensemble d'indices et $(u_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de E. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E, F)$ deux applications linéaires de E dans F. Si pour tout indice $i \in I$, $\varphi(u_i) = \psi(u_i)$, alors $\varphi = \psi$.

Théorème 3

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n, alors il existe un isomorphisme entre $(E, +, \bullet)$ et $(\mathbb{K}^n, \dot{+}, \dot{\cdot})$.

3 Noyau, Image et dimension

Définition 6 – Noyau

Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre E et F.
On définit le noyau de φ, Ker (φ) par :

$$\mathrm{Ker}\,(\varphi) := \{x \in E \mid \varphi(x) = 0_F\}.$$

Proposition 5

Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre E et F. Alors $\operatorname{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +_E, \bullet_E)$.

Définition 7 – Image

Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre E et F.
On définit l'image de φ, $\operatorname{Im}(\varphi)$ par :

$$\operatorname{Im}(\varphi) := \{\varphi(x) \in F \mid x \in E\}.$$

Proposition 6

Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre E et F. Alors $\operatorname{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $(F, +_F, \bullet_F)$.

Théorème 4

Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre E et F. On suppose que $(E, +_E, \bullet_E)$ est de dimension fini. Alors,

$$\dim(E) = \dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f))$$

Corollaire 1

Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si E ou F est de dimension fini et s'il existe un isomorphisme $\varphi \in Isom(E, F)$, alors E et F sont de dimensions finis et égales.

Corollaire 2

Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose que $(E, +_E, \bullet_E)$ est de dimension fini. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E dans F.
Les trois assertions suivantes sont équivalents :

1. φ est un isomorphisme ;
2. φ est injectif et $\dim E = \dim F$;
3. φ est surjectif et $\dim E = \dim F$.