Applications linéaires

Marc Chevalier

DI ENS

19 mars 2018

Préliminaires

Intuition

Définitions

Propriétés

Préliminaires

marc.chevalier@ens.fr

Applications linéaires

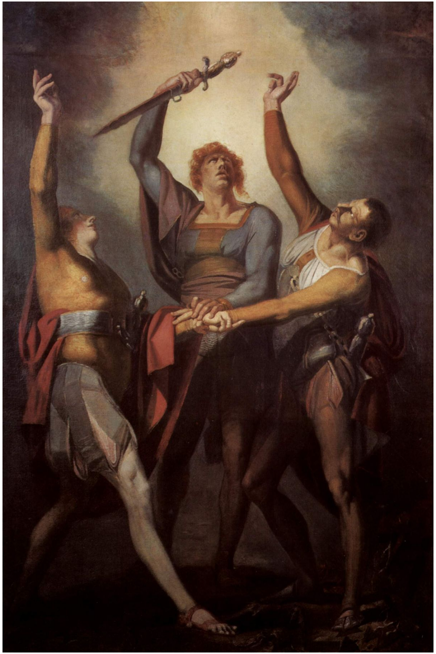
Marc Chevalier

Préliminaires

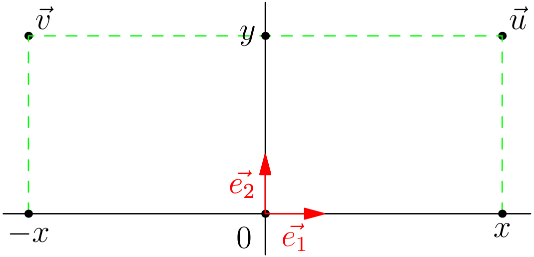
Intuition

Définitions

Propriétés



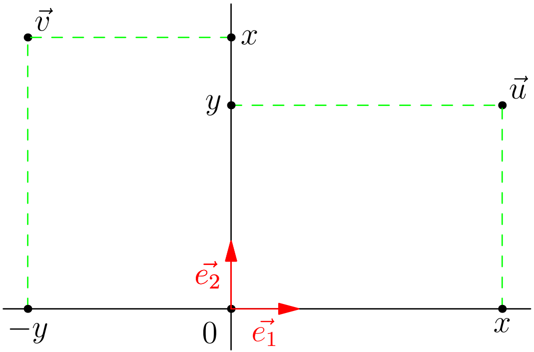
Intuition – Symétrie



$$
\begin{aligned}
s(x \cdot \vec{e_1} + y \cdot \vec{e_2}) &= s(\vec{u}) \\
&= \vec{v} \\
&= -x \cdot \vec{e_1} + y \cdot \vec{e_2}
\end{aligned}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{ccccc}
\vec{e_1} & \mapsto & - & \vec{e_1} \\
\vec{e_2} & \mapsto & & \vec{e_2}
\end{array}
\right.
\Leftrightarrow
\left\{
\begin{array}{cccccc}
\vec{e_1} & \mapsto & -1 & \vec{e_1} & + & 0 & \vec{e_2} \\
\vec{e_2} & \mapsto & 0 & \vec{e_1} & + & 1 & \vec{e_2}
\end{array}
\right.
$$

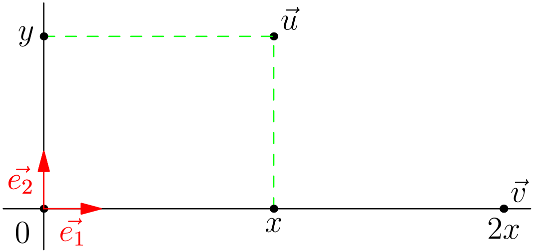
Intuition – Rotation



$$\begin{aligned} r(x \cdot \vec{e_1} + y \cdot \vec{e_2}) &= r(\vec{u}) \\ &= \vec{v} \\ &= x \cdot \vec{e_2} - y \cdot \vec{e_1} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrc} \vec{e_1} & \mapsto & & \vec{e_2} \\ \vec{e_2} & \mapsto & - & \vec{e_1} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcccc} \vec{e_1} & \mapsto & 0 & \vec{e_1} & + & 1 & \vec{e_2} \\ \vec{e_2} & \mapsto & -1 & \vec{e_1} & + & 0 & \vec{e_2} \end{array} \right.$$

Intuition – Projection + homothétie



$$\begin{aligned} p(x \cdot \vec{e_1} + y \cdot \vec{e_2}) &= p(\vec{u}) \\ &= \vec{v} \\ &= 2x \cdot \vec{e_1} + 0 \cdot \vec{e_2} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \vec{e_1} & \mapsto & 2 & \vec{e_1} \\ \vec{e_2} & \mapsto & & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcllcll} \vec{e_1} & \mapsto & 2 & \vec{e_1} & + & 0 & \vec{e_2} \\ \vec{e_2} & \mapsto & 0 & \vec{e_1} & + & 0 & \vec{e_2} \end{array} \right.$$

Définitions

Définition 1 – Applications linéaires

Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-ev. Une application linéaire de $(E, +, \bullet)$ dans $(F, +, \bullet)$ est une fonction φ de E dans F qui vérifie les deux propriétés suivantes :

1. *(additivité)* $\forall u, v \in E$, on a : $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$;
2. *(homogénéité)* $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall u \in E$, on a : $\varphi(\lambda \bullet u) = \lambda \bullet \varphi(u)$.

L'ensemble des applications linéaires de $(E, +, \bullet)$ dans $(F, +, \bullet)$ est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Définitions

E et F des $\mathbb{K}$-ev.
Zoologie :

	$E \to E$	$E \to F$
Bijectif	Automorphisme $\mathcal{GL}(E)$	Isomorphisme $\mathrm{Isom}(E, F)$
Injectif		Monomorphisme Morphisme monique
Surjectif		Épimorphisme Morphisme épique
Rien	Endomorphisme $\mathcal{L}(E)$	Morphisme Homomorphisme Application linéaire $\mathcal{L}(E, F)$

Et un à part : $E \to \mathbb{K}$: forme linéaire (cas particulier quand $F = \mathbb{K}$)

Propriétés

Proposition 1

Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-ev. $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\varphi(0) = 0$$

Propriétés

Proposition 2

Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-ev. $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $u \in E$.

$$\varphi(-u) = -\varphi(u)$$

Propriétés

Proposition 3

Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-ev. $\varphi : E \to F$.

$$\varphi \in \mathcal{L}(E, F) \Leftrightarrow \forall (u, v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \varphi(u + \lambda v) = \varphi(u) + \lambda \varphi(v)$$

Propriétés

Proposition 4

Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-ev. $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\begin{aligned} \varphi \text{ injectif } &\Leftrightarrow \left(\forall u \in E, \varphi(u) = 0 \Rightarrow u = 0\right) \\ &\Leftrightarrow \left\{ u \in E \,\middle|\, \varphi(u) = 0 \right\} = \{0\} \end{aligned}$$

Propriétés

Proposition 5

Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-ev.
$\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-ev.