# Matrices

Marc CHEVALIER
DI ENS
sur une idée originale de Jérôme FERET

19 mars 2018

## Table des matières

# 1 Algèbre des matrices

**Définition 1 – matrice**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. On appelle une matrice d'éléments de $\mathbb{K}$ à $m$ lignes et à $n$ colonnes une famille d'éléments $(a_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ de $\mathbb{K}$ indexée par les couple $(i, j)$ où $i$ varie entre 1 et $m$, et $j$ varie entre 1 et $n$.
On dit aussi que $(a_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ est une matrice de taille $m \times n$.
On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de tailles $m \times n$ d'élément de $\mathbb{K}$.
Enfin, lorsque $m = n$, on dit que les matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sont carrés de taille $m$.

**Définition 2 – ligne**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A := (a_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$. Soit $i_0$ un entier entre 1 et $m$. On appelle $i_0$-ième ligne de $A$, la famille de $n$ éléments de $\mathbb{K}$ $(a_{i_0,j})_{1\leq j\leq n}$.

**Définition 3 – colonne**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs Soit $A := (a_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$. Soit $j_0$ un entier entre 1 et $n$. On appelle $j_0$-ième colonne de $A$, la famille de $m$ éléments de $\mathbb{K}$ $(a_{i,j_0})_{1\leq i\leq m}$.

**Notation 1**

On note habituellement les éléments d'une matrice sous forme de tableau. Par exemple, la matrice de taille $3 \times 3$ et d'éléments $(a_{i,j})_{1\leq i\leq 3, 1\leq j\leq 3}$ sera notée :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

**Définition 4 – somme**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On note $A := (a_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ et $B := (b_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$. La matrice $(a_{i,j} + b_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ est appelée la somme des deux matrices $A$ et $B$. On la note $A + B$.

**Exemple 1**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 10 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 14 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$

**Définition 5 – produit externe**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On note $A := (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. La matrice $(\lambda \cdot a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ est appelée le produit de la matrice $A$ par le scalaire $\lambda$. On la note $\lambda \cdot A$.

**Exemple 2**

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 10 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 20 & 4 & -2 \\ 10 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

**Définition 6**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $k$ un entier entre 1 et $m$ et soit $k'$ un entier entre 1 et $n$. On note $E_{k,k'} := (\delta_i^k \cdot \delta_j^{k'})$ la matrice de taille $m \times n$ dont tous les éléments sont nuls, sauf dans la case à la ligne $k$ et à la colonne $k'$ dans laquelle la valeur est 1.

**Proposition 1**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $m \cdot n$. De plus, la famille des matrices élémentaire $(E_{i,j}^{m,n})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ est une base de $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$.

*Démonstration.* On sait que $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Puis $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. La famille $(E_{i,j})$ est une base car la famille $(1)$ est une base de $(\mathbb{K}, +, \cdot)$. □

**Définition 7 – produit interne**

Soient $m, n, o \in \mathbb{N}$ trois entiers positifs. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,o}(\mathbb{K})$. On note $A := (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ et $B := (b_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq o}$. La matrice $(c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,o}(\mathbb{K})$ définie par :

$$c_{i,j} := \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \cdot b_{k,j},$$

pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq o$, est appelée le produit entre $A$ et $B$, et est notée $A \times B$.

**Exemple 3**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 10 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 8 & 3 \\ 22 & 18 & 19 \\ 66 & 20 & 4 \end{pmatrix}$$

*Démonstration.*

$$\begin{array}{cc|ccc} & & 3 & 4 & 5 \\ & & 10 & 2 & -1 \\ \hline 1 & 2 & 1\cdot 3+2\cdot 10 & 1\cdot 4+2\cdot 2 & 1\cdot 5+2\cdot(-1) \\ 4 & 1 & 4\cdot 3+1\cdot 10 & 4\cdot 4+1\cdot 2 & 4\cdot 5+1\cdot(-1) \\ 2 & 6 & 2\cdot 3+6\cdot 10 & 2\cdot 4+6\cdot 2 & 2\cdot 5+6\cdot(-1) \end{array}$$

□

**Proposition 2**

Soient $m, n, o, p \in \mathbb{N}$ quatre entiers. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,o}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{o,p}(\mathbb{K})$ trois matrices à valeur dans $\mathbb{K}$.
Alors :

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C.$$

*Démonstration.* Exercice □

**Proposition 3**

Soient $m, n, o \in \mathbb{N}$ trois entiers naturels. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans $\mathbb{K}$. La fonction $\phi : \mathcal{M}_{n,o}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{m,o}(\mathbb{K})$ qui à toute matrice $B \in \mathcal{M}_{n,o}(\mathbb{K})$ de taille $n \times o$ à valeur dans $\mathbb{K}$ associe la matrice $A \times B$ est une application linéaire entre $(\mathcal{M}_{n,o}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ et $(\mathcal{M}_{m,o}(\mathbb{K}), +, \cdot)$.

*Démonstration.* Exercice □

**Définition 8 – transposée**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de $\mathbb{K}$. On note $A := (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. La matrice $(a_{j,i})_{1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m}$ est une matrice de taille $n \times m$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Cette matrice est appelée la transposée de $A$ et est noté ${}^{T}A$.

**Exemple 4**

On a :

$${}^{T}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Proposition 4**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soient $i$ un entier entre 1 et $m$ et $j$ un entier entre 1 et $n$. Alors ${}^{T}E_{i,j}^{m,n} = E_{j,i}^{n,m}$.

*Démonstration.* Exercice □

**Proposition 5**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. La fonction $\phi : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ qui à chaque matrice de taille $m \times n$ à valeur dans $\mathbb{K}$ associe sa transposée est un isomorphisme entre $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ et $(\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}), +, \cdot)$.

*Démonstration.* Exercice □

**Proposition 6**

Soient $m, n, o \in \mathbb{N}$ trois entiers positifs. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,o}(\mathbb{K})$ deux matrices de tailles $m \times n$ et $n \times o$, et d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors, on a :

$${}^{T}(M \times N) = {}^{T}N \times {}^{T}M.$$

*Démonstration.* Exercice □

**Proposition 7**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice à valeur dans $\mathbb{K}$ et de taille $m \times n$. Alors, on a :

$$^T(^TA) = A.$$

*Démonstration.* Exercice $\square$

**Proposition 8**

Soient $m, n, o \in \mathbb{N}$ trois entiers naturels. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,o}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $n \times o$ à valeur dans $\mathbb{K}$. La fonction $\phi : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{m,o}(\mathbb{K})$ qui à toute matrice $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de taille $m \times o$ à valeur dans $\mathbb{K}$ associe la matrice $B \times A$ est une application linéaire entre $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ et $(\mathcal{M}_{m,o}(\mathbb{K}), +, \cdot)$.

*Démonstration.* Soit $m, n, o \in \mathbb{N}$ trois entiers naturels. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,o}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $n \times o$ à valeur dans $\mathbb{K}$. La fonction $\phi : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{m,o}(\mathbb{K})$ qui à toute matrice $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de taille $m \times n$ à valeur dans $\mathbb{K}$ associe la matrice $B \times A$. Soient $B, B' \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ deux matrices de tailles $m \times n$ à valeur dans $\mathbb{K}$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{array}{ll}
(B + \lambda \cdot B') \times A = {}^T({}^T((B + \lambda \cdot B') \times A)) & \text{(par la propriété 7)} \\
(B + \lambda \cdot B') \times A = {}^T({}^TA \times {}^T(B + \lambda \cdot B')) & \text{(par la propriété 6)} \\
(B + \lambda \cdot B') \times A = {}^T({}^TA \times ({}^TB + \lambda \cdot ({}^TB'))) & \text{(par la propriété 5)} \\
(B + \lambda \cdot B') \times A = {}^T({}^TA \times {}^TB + \lambda \cdot ({}^TA \times {}^TB'))) & \text{(par la propriété 3)} \\
(B + \lambda \cdot B') \times A = {}^T({}^T(B \times A) + \lambda \cdot {}^T(B' \times A)) & \text{(par la propriété 6)} \\
(B + \lambda \cdot B') \times A = {}^T({}^T(B \times A)) + \lambda \cdot {}^T({}^T(B' \times A)) & \text{(par la propriété 5)} \\
(B + \lambda \cdot B') \times A = B \times A + \lambda \cdot B' \times A & \text{(par la propriété 7)}
\end{array}$$

Donc $\phi$ est une application linéaire. $\square$

# 2 Transformations élémentaires

## 2.1 Matrice identité

**Définition 9 – identité**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. On note $\mathrm{I}_{m,n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ la matrice carrée $(\delta_i^j)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$.

**Exemple 5**

Par exemple, on a :

$$\mathrm{I}_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Proposition 9**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On a : $A = \mathrm{I}_{m,m} \times A$.

*Démonstration.* Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans $\mathbb{K}$. On note $A := (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. On note $\mathrm{I}_{m,m} \times A := (b_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. Soit $i \in \mathbb{N}$ un entier entre 1 et $m$, et $j \in \mathbb{N}$ un entier entre 1 et $n$.

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} \delta_k^i \cdot a_{k,j}.$$

On a $i$ entre 1 et $m$, la somme s'annule partout sauf, pour $k = i$.

$$b_{i,j} = a_{i,j}.$$

$\square$

**Proposition 10**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On a : $A = A \times \mathrm{I}_{n,n}$.

*Démonstration.* Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans $\mathbb{K}$. On note $A := (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. On note

$A \times \mathrm{I}_{n,n} := (b_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. Soit $i \in \mathbb{N}$ un entier entre 1 et $m$, et $j \in \mathbb{N}$ un entier entre 1 et $n$.

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \cdot \delta_j^k.$$

On a $j$ entre 1 et $n$, la somme s'annule partout sauf, pour $k = j$.

$$b_{i,j} = a_{i,j}.$$

□

**Proposition 11**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs tels que $m \leq n$, alors $\mathrm{I}_{m,n} \times \mathrm{I}_{n,m} = \mathrm{I}_{m,m}$.

*Démonstration.* Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs tels que $m \leq n$.
On note $\mathrm{I}_{m,n} \times \mathrm{I}_{n,m} := (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m}$.
Soit $i, j$ deux entiers entre 1 et $m$.
On a : $a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_i^k \cdot \delta_k^j$.

1. si $i = j$, alors la somme s'annule partout, sauf pour $k = i$. Puis $a_{i,j} = 1$.
2. sinon, la somme s'annule partout. Puis $a_{i,j} = 0$.

□

## 2.2 Permutation de lignes et de colonnes

**Définition 10 – matrice de permutation**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $k$ et $k'$ deux entiers entre 1 et $n$. On note $\textsc{Swap}_n(k, k')$ la matrice $\mathrm{I}_{n,n} - \mathrm{E}_{k,k}^{n,n} - \mathrm{E}_{k',k'}^{n,n} + \mathrm{E}_{k,k'}^{n,n} + \mathrm{E}_{k',k}^{n,n}$.

**Exemple 6**

Par exemple :

$$\textsc{Swap}_6(2,4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Proposition 12**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $k, k'$ deux entiers compris entre 1 et $n$. On a :

$$^{T}(\textsc{Swap}_n(k,k')) = \textsc{Swap}_n(k,k')$$

*Démonstration.* Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $k, k'$ deux entiers compris entre 1 et $n$. On a :

$$\begin{aligned}
^{T}(\textsc{Swap}_n(k,k')) &= {}^{T}(\mathrm{I}_{n,n} - \mathrm{E}^{n,n}_{k,k} - \mathrm{E}^{n,n}_{k',k'} + \mathrm{E}^{n,n}_{k,k'} + \mathrm{E}^{n,n}_{k',k}) \\
^{T}(\textsc{Swap}_n(k,k')) &= {}^{T}\mathrm{I}_{n,n} - {}^{T}\mathrm{E}^{n,n}_{k,k} - {}^{T}\mathrm{E}^{n,n}_{k',k'} + {}^{T}\mathrm{E}^{n,n}_{k,k'} + {}^{T}\mathrm{E}^{n,n}_{k',k} \\
^{T}(\textsc{Swap}_n(k,k')) &= \mathrm{I}_{n,n} - \mathrm{E}^{n,n}_{k,k} - \mathrm{E}^{n,n}_{k',k'} + \mathrm{E}^{n,n}_{k',k} + \mathrm{E}^{n,n}_{k,k'} \\
^{T}(\textsc{Swap}_n(k,k')) &= \textsc{Swap}_n(k,k').
\end{aligned}$$

□

**Proposition 13 – permutation de lignes**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soient $k, k'$ deux entiers compris entre 1 et $m$. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors la matrice $\textsc{Swap}_m(k,k') \times A$ est la matrice dont la $l$-ième ligne est la $l$-ième ligne de $A$ pour $l \notin \{k, k'\}$, la $k$-ième ligne est la $k'$-ième ligne de $A$, et la $k'$-ième ligne est la $k$-ième ligne de $A$.

*Démonstration.* Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soient $k, k'$ deux entiers compris entre 1 et $m$. Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On note $A := (a_{i,j})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$. On a :

$$\begin{aligned}
(\textsc{Swap}_m(k,k') \times A)_{i,j} &= \textstyle\sum_{l=1}^{m} (\textsc{Swap}_m(k,k'))_{i,l} \cdot a_{l,j} \\
(\textsc{Swap}_m(k,k') \times A)_{i,j} &= \textstyle\sum_{l=1}^{m} (\delta_i^l - \delta_i^k \cdot \delta_l^k - \delta_i^{k'} \cdot \delta_l^{k'} + \delta_i^{k'} \cdot \delta_l^k + \delta_i^k \cdot \delta_l^{k'}) \cdot a_{l,j}
\end{aligned}$$

Puis :

1. pour $i \notin \{k, k'\}$ :

$$\delta_i^l - \delta_i^k \cdot \delta_l^k - \delta_i^{k'} \cdot \delta_l^{k'} + \delta_i^{k'} \cdot \delta_l^k + \delta_i^k \cdot \delta_l^{k'} = \delta_i^l.$$

   Puis :

$$\begin{aligned}
(\textsc{Swap}_m(k,k') \times A)_{i,j} &= \textstyle\sum_{l=1}^{m} \delta_i^l \cdot a_{l,j} \,; \\
(\textsc{Swap}_m(k,k') \times A)_{i,j} &= a_{i,j}
\end{aligned}$$

2. pour $i = k$ et $i \neq k'$ :

$$\delta_k^l - \delta_l^k + \delta_l^{k'} = \delta_l^{k'}$$

   Puis :

$$\begin{aligned}
(\textsc{Swap}_m(k,k') \times A)_{k,j} &= \textstyle\sum_{l=1}^{m} \delta_l^{k'} \cdot a_{l,j} \,; \\
(\textsc{Swap}_m(k,k') \times A)_{k,j} &= a_{k',j}
\end{aligned}$$

3. pour $i = k'$ et $i \neq k$ :
$$\delta_{k'}^{l} - \delta_{l}^{k'} + \delta_{l}^{k} = \delta_{l}^{k}$$
Puis :
$$(\textsc{Swap}_m(k,k') \times A)_{k',j} = a_{k,j}$$
4. pour $i = k'$ et $i = k$ :
$$\delta_{k}^{l} - \delta_{l}^{k} - \delta_{l}^{k'} + \delta_{l}^{k} + \delta_{l}^{k'} = \delta_{k}^{l}$$
Puis :
$$(\textsc{Swap}_m(k,k') \times A)_{k,j} = a_{k,j}$$
$$(\textsc{Swap}_m(k,k') \times A)_{k,j} = a_{k',j}$$

□

**Proposition 14 – permutation de colonnes**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soient $k, k'$ deux entiers compris entre 1 et $n$. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors la matrice $A \times \textsc{Swap}_n(k,k')$ est la matrice dont la $l$-ième colonne est la $l$-ième colonne de $A$ pour $l \notin \{k, k'\}$, la $k$-ième colonne est la $k'$-ième colonne de $A$, et la $k$-ième colonne est la $k'$-ième colonne de $A$.

*Démonstration.* Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soient $k, k'$ deux entiers compris entre 1 et $m$. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de $\mathbb{K}$.
On a : ${}^{T}(A \times \textsc{Swap}_n(k,k')) = \textsc{Swap}_n(k,k') \times {}^{T}A$.
Donc la transposée de $A \times \textsc{Swap}_n(k,k')$ est la transposée de $A$ donc on a permuté les lignes $k$ et $k'$.
Puis $A \times \textsc{Swap}_n(k,k')$ est la matrice $A$ dans laquelle on a permuté les colonnes $k$ et $k'$. □

**Exemple 7**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Proposition 15**

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier. Soient $k, k'$ deux entiers compris entre 1 et $n$. On a :

$$(\textsc{Swap}_n(k,k'))^2 = \mathrm{I}_{n,n}$$

## 2.3 Multiplication d'une ligne ou d'une colonne par un scalaire

**Définition 11 – matrice de dilatation**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $k$ un entier entre 1 et $n$ et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ un scalaire non nul. On note $\textsc{Dilat}_n(k,\lambda)$ la matrice $\mathrm{I}_{n,n} + (\lambda - 1) \cdot \mathrm{E}^{n,n}_{k,k}$.

**Exemple 8**

Par exemple,

$$\textsc{Dilat}_5(2,4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Proposition 16**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $k$ un entier compris entre 1 et $n$ et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ un scalaire non nul. On a : ${}^T(\textsc{Dilat}_n(k,\lambda)) = \textsc{Dilat}_n(k,\lambda)$.

*Démonstration.* Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $k$ un entier compris entre 1 et $n$ et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ un scalaire non nul. On a :

$$\begin{aligned}
{}^T(\textsc{Dilat}_n(k,\lambda)) &= {}^T(\mathrm{I}_{n,n} + (\lambda-1) \cdot \mathrm{E}^{n,n}_{k,k}) \\
{}^T(\textsc{Dilat}_n(k,\lambda)) &= {}^T(\mathrm{I}_{n,n}) + {}^T((\lambda-1) \cdot \mathrm{E}^{n,n}_{k,k}) \\
{}^T(\textsc{Dilat}_n(k,\lambda)) &= {}^T(\mathrm{I}_{n,n}) + (\lambda-1) \cdot {}^T\mathrm{E}^{n,n}_{k,k} \\
{}^T(\textsc{Dilat}_n(k,\lambda)) &= \mathrm{I}_{n,n} + (\lambda-1) \cdot \mathrm{E}^{n,n}_{k,k} \\
{}^T(\textsc{Dilat}_n(k,\lambda)) &= \textsc{Dilat}_n(k,\lambda)
\end{aligned}$$

□

**Proposition 17 – dilatation de lignes**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soient $k$ un entier compris entre 1 et $m$ et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ un scalaire non nul. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors la matrice $\text{DILAT}_m(k, \lambda) \times A$ est la matrice dont la $l$-ième ligne est la $l$-ième ligne de $A$ pour $l \neq k$, la $k$-ième ligne est la $k$-ième ligne de $A$ multipliée par le scalaire $\lambda$.

*Démonstration.* Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soient $k$ un entier compris entre 1 et $m$ et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ un scalaire non nul. Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
On note $A := (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq i \leq n}$.
On a :

$$(\text{DILAT}_m(k, \lambda) \times A)_{i,j} = \textstyle\sum_{l=1}^{m} (\text{DILAT}_m(k, \lambda))_{i,l} \cdot a_{l,j}$$
$$(\text{DILAT}_m(k, \lambda) \times A)_{i,j} = \textstyle\sum_{l=1}^{m} (\delta_i^l + (\lambda - 1) \cdot \delta_i^k \cdot \delta_l^k) \cdot a_{l_j}$$

Puis :

1. pour $i \neq k$ :
$$\delta_i^l + (\lambda - 1) \cdot \delta_i^k \cdot \delta_l^k = \delta_i^l.$$
Puis :
$$(\text{DILAT}_m(k, \lambda) \times A)_{i,j} = \textstyle\sum_{l=1}^{m} \delta_i^l \cdot a_{l,j} \,;$$
$$(\text{DILAT}_m(k, \lambda) \times A)_{i,j} = a_{i,j}$$
2. pour $i = k$ :
$$\delta_i^l + (\lambda - 1) \cdot \delta_l^k = \lambda \cdot \delta_i^l$$
Puis :
$$(\text{DILAT}_m(k, \lambda) \times A)_{k,j} = \textstyle\sum_{l=1}^{m} \lambda \cdot \delta_l^i \cdot a_{l,j} \,;$$
$$(\text{DILAT}_m(k, \lambda) \times A)_{k,j} = \lambda \cdot a_{i,j}.$$

□

**Proposition 18 – dilatation de colonnes**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soit $k, k'$ deux entiers compris entre 1 et $n$ et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ un scalaire non nul. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors la matrice $A \times \text{DILAT}_n(k, \lambda)$ est la matrice dont la $l$-ième colonne est la $l$-ième colonne de $A$ pour $l \neq k$, la $k$-ième colonne est la $k$-ième colonne de $A$ multipliée par le scalaire $\lambda$.

*Démonstration.* Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs, soit $k$ un entier compris entre 1 et $n$, et soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ un scalaire non nul. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de $\mathbb{K}$.

On a : ${}^T(A \times \textsc{Dilat}_n(k,\lambda)) = \textsc{Dilat}_n(k,\lambda) \times {}^T A$.
Donc la transposée de $A \times \textsc{Dilat}_n(k,\lambda)$ est la transposée de $A$ donc on a multiplié la $k$-ième ligne par $\lambda$.
Puis $A \times \textsc{Dilat}_n(k,\lambda)$ est la matrice $A$ dans laquelle on a multiplié la colonne $k$ par $n$. □

**Exemple 9**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 10 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Proposition 19**

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier, soit $k$ un entier entre 1 et $n$, et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K} \in \setminus\{0\}$ deux scalaires non nuls. Alors $\textsc{Dilat}_n(k,\lambda) \times \textsc{Dilat}_n(k,\mu) = \textsc{Dilat}_n(k,\lambda \cdot \mu)$.

*Démonstration.* En exercice. □

## 2.4 Ajout de lignes et de colonnes

**Définition 12 – matrice de combinaison**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $k$ et $k'$ deux entiers distincts entre 1 et $n$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. On note $\textsc{Add}_n(k,k',\lambda)$ la matrice $\mathrm{I}_{n,n} + \lambda \cdot \mathrm{E}^{n,n}_{k,k'}$.

**Exemple 10**

Par exemple,

$$\textsc{Add}_5(1,3,4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Proposition 20**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $k, k'$ deux entiers distincts compris entre 1 et $n$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. On a : ${}^T(\mathrm{ADD}_n(k,k',\lambda)) = \mathrm{ADD}_n(k',k,\lambda)$.

*Démonstration.* Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $k, k'$ deux entiers distincts compris entre 1 et $n$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. On a :

$$\begin{aligned}
{}^T(\mathrm{ADD}_n(k,k',\lambda)) &= {}^T(\mathrm{I}_{n,n} + \lambda \cdot \mathrm{E}^{n,n}_{k,k'}) \\
{}^T(\mathrm{ADD}_n(k,k',\lambda)) &= {}^T(\mathrm{I}_{n,n}) + {}^T(\lambda \cdot \mathrm{E}^{n,n}_{k,k'}) \\
{}^T(\mathrm{ADD}_n(k,k',\lambda)) &= \mathrm{I}_{n,n} + \lambda \cdot {}^T\mathrm{E}^{n,n}_{k,k'} \\
{}^T(\mathrm{ADD}_n(k,k',\lambda)) &= \mathrm{I}_{n,n} + \lambda \cdot \mathrm{E}^{n,n}_{k',k} \\
{}^T(\mathrm{ADD}_n(k,k',\lambda)) &= \mathrm{ADD}_n(k',k,\lambda).
\end{aligned}$$

□

**Proposition 21 –** ajout d'une ligne

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soient $k, k'$ deux entier distincts compris entre 1 et $m$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors la matrice $\mathrm{ADD}_m(k,k',\lambda) \times A$ est la matrice dont la $l$-ième ligne est la $l$-ième ligne de $A$ pour $l \neq k$, la $k$-ième ligne est la $k$-ième ligne de $A$ plus la $k'$-ième ligne de $A$ multipliée par le scalaire $\lambda$.

*Démonstration.* Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soient $k, k'$ deux entiers distincts compris entre 1 et $m$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On note $A := (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq i \leq n}$.
On a :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{ADD}_m(k,k',\lambda) \times A)_{i,j} &= \textstyle\sum_{l=1}^{m} (\mathrm{ADD}_m(k,k',\lambda))_{i,l} \cdot a_{l,j} \\
(\mathrm{ADD}_m(k,k',\lambda) \times A)_{i,j} &= \textstyle\sum_{l=1}^{m} (\delta_i^l + \lambda \cdot \delta_i^k \cdot \delta_l^{k'}) \cdot a_{l_j}
\end{aligned}$$

Puis :

1. pour $i \neq k$ :

$$\delta_i^l + \lambda \cdot \delta_i^k \cdot \delta_l^{k'} = \delta_i^l.$$

   Puis :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{ADD}_m(k,k',\lambda) \times A)_{i,j} &= \textstyle\sum_{l=1}^{m} \delta_i^l \cdot a_{l,j}\ ; \\
(\mathrm{ADD}_m(k,k',\lambda) \times A)_{i,j} &= a_{i,j}
\end{aligned}$$

2. pour $i = k$ :
$$\delta_i^l + \lambda \cdot \delta_i^k \cdot \delta_l^{k'} = \delta_i^l + \lambda \cdot \delta_l^{k'}.$$

Puis :
$$\begin{aligned}(\mathrm{ADD}_m(k,k',\lambda) \times A)_{k,j} &= \textstyle\sum_{l=1}^m \delta_i^l \cdot a_{l,j} + \sum_{l=1}^m \lambda \cdot \delta_l^{k'} \cdot a_{l,j} \\ (\mathrm{ADD}_m(k,k',\lambda) \times A)_{k,j} &= a_{i,j} + \lambda \cdot a_{k',j}.\end{aligned}$$

□

**Proposition 22 –** ajout d'une colonne

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soit $k, k'$ deux entiers distincts compris entre 1 et $n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors la matrice $A \times \mathrm{ADD}_n(k,k',\lambda)$ est la matrice dont la $l$-ième colonne est la $l$-ième colonne de $A$ pour $l \neq k'$, la $k'$-ième colonne est la $k'$-ième colonne de $A$ plus la $k$-ième colonne de $A$ multipliée par le scalaire $\lambda$.

*Démonstration.* Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs, soit $k, k'$ deux entiers distincts compris entre 1 et $n$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de $\mathbb{K}$.
On a : ${}^T(A \times \mathrm{ADD}_n(k,k',\lambda)) = \mathrm{ADD}_n(k',k,\lambda) \times {}^TA$.
Donc la transposée de $A \times \mathrm{ADD}_n(k,k',\lambda)$ est la transposée de $A$ donc on a ajouté à la ligne $k'$ la ligne $k$ multipliée par le scalaire $\lambda$.
Puis $A \times \mathrm{ADD}_n(k,k',\lambda)$ est la matrice $A$ dans laquelle on a ajouté à la colonne $k'$ la colonne $k$ multipliée par le scalaire $\lambda$. □

**Exemple 11**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 11 & 14 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 10 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Proposition 23**

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier, soit $k, k'$ deux entiers distincts entre 1 et $n$, et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ deux scalaires. Alors $\text{ADD}_n(k, k', \lambda) \times \text{ADD}_n(k, k', \mu) = \text{ADD}_n(k, k', \lambda + \mu)$.

*Démonstration.* En exercice □

# 3 Matrices inversibles

## 3.1 Inversibilité à gauche et à droite

**Définition 13 – matrice inversible à gauche**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans $\mathbb{K}$. On dit que $A$ est inversible à gauche si et seulement si il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ de taille $n \times m$ à valeur dans $\mathbb{K}$ telle que $B \times A = \mathrm{I}_{n,n}$.
La matrice $B$ est alors appelée un inverse à gauche de $A$.

**Exemple 12**

La matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a plusieurs inverses à gauche.
Par exemple, pour tout $a, b \in \mathbb{K}$, la matrice :

$$\begin{pmatrix} -\frac{1+5\cdot a}{3} & \frac{2-2\cdot a}{3} & a \\ \frac{2-5\cdot b}{3} & -\frac{1+2\cdot b}{3} & b \end{pmatrix}$$

est un inverse à gauche de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

.

*Démonstration.* En exercice. □

**Définition 14 – matrice inversible à droite**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans $\mathbb{K}$. On dit que $A$ est inversible à droite si et seulement si il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ de taille $n \times m$ à valeur dans $\mathbb{K}$ telle que $A \times B = \mathrm{I}_{m,m}$.
La matrice $B$ est alors appelée un inverse à droite de $A$.

**Exemple 13**

La matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a des inverses à droite.

Par exemple, pour tout $a, b \in \mathbb{K}$, la matrice :

$$\begin{pmatrix} -\frac{1+5\cdot a}{3} & \frac{2-5\cdot b}{3} \\ \frac{2-2\cdot a}{3} & -\frac{1+2\cdot b}{3} \\ a & b \end{pmatrix}$$

est un inverse à droite de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

.

*Démonstration.* En exercice. □

**Proposition 24**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans $\mathbb{K}$. La matrice $A$ est inversible à gauche si et seulement si la matrice ${}^{T}A$ est inversible à droite.
De plus, soit $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $n \times m$ à valeur dans $\mathbb{K}$. Alors la matrice $B$ est un inverse à gauche de $A$ si et seulement si la matrice ${}^{T}B$ est un inverse à droite de ${}^{T}A$.

*Démonstration.* En exercice. □

**Définition 15 – matrice inversible**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans $\mathbb{K}$. On dit que $A$ est inversible si et seulement si il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ telle que $A \times B = \mathrm{I}_{m,m}$ et $B \times A = \mathrm{I}_{n,n}$. La matrice $B$ est alors appelée un inverse de $A$.

**Notation 2**

Si une matrice $A$ est inversible, son inverse est noté $A^{-1}$.

**Exemple 14**

La matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

est inversible.
De plus, son inverse est :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & \frac{-7}{4} & \frac{3}{4} \\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}.$$

*Démonstration.* En exercice. □

**Proposition 25**

Les matrices carrés de transformation élémentaire sont inversibles.

*Démonstration.* Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel.

1. Par la propriété 10, on a :
$$\mathrm{I}_{n,n} \times \mathrm{I}_{n,n} = \mathrm{I}_{n,n}.$$
Donc $\mathrm{I}_{n,n}$ est inversible et son inverse est $\mathrm{I}_{n,n}$.
2. Soit $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est une matrice de permutation. Alors, par la propriété 15, on a : $B \times B = \mathrm{I}_{n,n}$.
Donc la matrice $B$ est inversible et son inverse est $B$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$. Soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Par la propriété 19, on a : $\mathrm{DILAT}_n(k, \lambda) \times \mathrm{DILAT}_n(k, \frac{1}{\lambda}) = \mathrm{DILAT}_n(k, 1)$ et $\mathrm{DILAT}_n(k, \frac{1}{\lambda}) \times \mathrm{DILAT}_n(k, \lambda) = \mathrm{DILAT}_n(k, 1)$. Or $\mathrm{DILAT}_n(k, 1) = \mathrm{I}_{n,n}$.
Donc $\mathrm{DILAT}_n(k, \lambda)$ est inversible et son inverse est $\mathrm{DILAT}_n(k, \frac{1}{\lambda})$.

4. Si il existe $k, k'$ deux entiers distincts entre 1 et $n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, par la propriété 23, on a :$\text{ADD}_n(k,k',\lambda) \times \text{ADD}_n(k,k',-\lambda) = \text{ADD}_n(k,k',0)$ et $\text{ADD}_n(k,k',-\lambda) \times \text{ADD}_n(k,k',\lambda) = \text{ADD}_n(k,k',0)$. Or, $\text{ADD}_n(k,k',0) = \mathrm{I}_{n,n}$.
Donc $\text{ADD}_n(k,k',\lambda)$ est inversible et son inverse est $\text{ADD}_n(k,k',-\lambda)$.

□

**Proposition 26**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ qui a un admet un inverse à droite $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et un inverse à gauche $C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors $B = C$ (et $A$ est inversible).

*Démonstration.* Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ qui a un admet un inverse à droite $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et un inverse à gauche $C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
On a :

$$\begin{aligned}
B &= B \times \mathrm{I}_{m,m} && \text{(par la propriété 10)} \\
B &= B \times (A \times C) && \text{(par la définition 14)} \\
B &= (B \times A) \times C && \text{(par la propriété 2)} \\
B &= \mathrm{I}_{n,n} \times C && \text{(par la définition 13)} \\
B &= C && \text{(par la propriété 9).}
\end{aligned}$$

Donc $B = C$. □

## 3.2 Inversion à gauche

**Proposition 27**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans $\mathbb{K}$ telle que $A$ soit inversible à gauche. Alors,

1. pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ de talle $n \times 1$ à valeur dans $\mathbb{K}$, on a : $A \times X = (0)_{1 \le i \le m, j=1} \implies X = (0)_{1 \le i \le n, j=1}$ ;
2. les colonnes de $A$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^n$.

*Démonstration.* En exercice. □

**Proposition 28**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. La matrice identité $\mathrm{I}_{m,n}$ est inversible à gauche si et seulement si $m \ge n$.

*Démonstration.* 1. ($\Leftarrow$) Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs tels que $m \geq n$. On a $\mathrm{I}_{n,m} \times \mathrm{I}_{m,n} = \mathrm{I}_{n,n}$. Donc $\mathrm{I}_{m,n}$ est inversible à gauche.

2. ($\Rightarrow$) Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs tels que $\mathrm{I}_{m,n}$ soit inversible à gauche. Les colonnes de $\mathrm{I}_{m,n}$ forment une famille libre, donc il n'y a pas de colonne nulle, puis $m \geq n$.

$\square$

**Proposition 29**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifstels que $m \geq n$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$. Alors $A$ est un inverse à gauche de $\mathrm{I}_{m,n}$ si et seulement si pour tout $i$ entre 1 et $n$ et tout $j$ entre 1 et $n$, on a : $a_{i,j} = \delta^i_j$.

*Démonstration.* En exercice. $\square$

**Proposition 30**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans $\mathbb{K}$. Soit $B \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{K})$ une matrice inversible de taille $m \times m$. Alors $A$ est inversible à gauche si et seulement si $B \times A$ est inversible à gauche.

**Proposition 31**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans $\mathbb{K}$. Soit $B \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{K})$ une matrice inversible de taille $m \times m$. Soit $C \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $n \times m$ à valeur dans $\mathbb{K}$. Alors $C$ est un inverse à gauche de $A$ si et seulement si $C \times B^{-1}$ est un inverse à gauche de $B \times A$ est inversible à gauche.

*Démonstration.* On prouve les propriété 30 et 31 en même temps.

1. ($\Rightarrow$) Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans $\mathbb{K}$. Soit $B \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{K})$ une matrice carrée inversible de taille $m$. On suppose que $A$ est inversible à gauche. Soit $C \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ un inverse à gauche de $A$.
   On a :
   $(C \times B^{-1}) \times (B \times A) = (C \times (B^{-1} \times B)) \times A$ (par la propriété 2)
   $(C \times B^{-1}) \times (B \times A) = (C \times \mathrm{I}_{m,m}) \times A$ (par la définition 15)
   $(C \times B^{-1}) \times (B \times A) = C \times A$ (par la propriété 10)
   $(C \times B^{-1}) \times (B \times A) = \mathrm{I}_{n,n}$ (par la définition 13)

2. ($\Leftarrow$) Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans $\mathbb{K}$. Soit $B \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{K})$ une matrice inversible telle que $B \times A$ soit inversible. On a : $B^{-1}$ est une matrice inversible et de plus $A = B^{-1} \times (B \times A)$. On peut dont appliquer la preuve du sens direct ($\Rightarrow$) de la propriété que l'on est en train de montrer. Ainsi, $A$ est inversible à gauche.

$\square$

**Définition 16**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de taille $m \times n$ est dite échelonnée, si et seulement si il existe une fonction PIVOT qui associe à chaque indice de ligne de $A$ non nulle un indice de colonne, tel que :

1. Pour chaque ligne non nulle d'indice $i$, la première colonne non nulle a pour indice $\textsc{pivot}(i)$.
2. Pour chaque ligne non nulle d'indice $i$, $A_{i,\textsc{pivot}(i)} = 1$.
3. Pour chaque ligne $i$ non nulle, $A_{i,\textsc{pivot}(i)}$ est le seul élément non nul de la colonne $\textsc{pivot}(i)$.
4. Pour chaque paire de lignes non nulles, d'indice $i$ et $j$, on a : $i < j \implies \textsc{pivot}(i) < \textsc{pivot}(j)$.
5. Les lignes nulles, si il y en a, sont à la fin de la matrice.

**Exemple 15**

La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est échelonnée. La fonction PIVOT associe 1 à 1 (le pivot de la première ligne est sur la première colonne), et 2 à 3 (le pivot de la seconde ligne est sur la troisième colonne).

**Algorithme 1 –** pivot de Gaus

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$. Alors, quitte à permuter les lignes de $A$, multiplier les lignes de $A$ par une constante non nulle, et ajouter à une ligne une autre ligne multipliée par une constante, alors on peut écrire $A$ sous forme échelonnée.

On suppose $m \geq 1$ et $n \geq 1$.

1. Posons $p \leftarrow 1$.
2. Si $A$ n'est pas échelonnée, on prend la première colonne $j_0$ telle qu'il existe une ligne $i_0$ telle que $a_{i,j} \neq 0$, avec $i \geq p$.
3. On permute la ligne $p$ et la ligne $i_0$.
4. On utilise la ligne $p$ pour annuler le reste de la colonne $j_0$.
5. On pose $p \leftarrow p+1$.

*Démonstration.* On montre par récurrence que les $p-1$ premières lignes de $A$ forment une matrice échelonnée. □

**Proposition 32**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice échelonnée à valeur dans $\mathbb{K}$. Alors la matrice $A$ a un inverse à gauche si et seulement si $A = \mathrm{I}_{m,n}$ et $m \geq n$.

*Démonstration.* Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice échelonnée à valeur dans $\mathbb{K}$.

1. ($\Leftarrow$) Si $m \geq n$ et $A = \mathrm{I}_{m,n}$.
   Alors, par la propriété 28, $A$ est inversible à gauche.
2. ($\Rightarrow$) Soit $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ un inverse à gauche de $A$. Supposons, par l'absurde, qu'il existe une colonne sans pivot. Prenons la colonne sans pivot d'indice minimal $j_0$. On a :
   (a) $j_0 \leq \min(m, n)$.
   (b) Pour $k, k' \in \mathbb{K}$ tels que $1 \leq k < j_0$ et $1 \leq k' < j_0$, $a_{k,k'} = \delta_{k'}^{k}$.
   (c) Pour $k \in \mathbb{K}$ tel que $j_0 \leq k \leq m$, on a : $a_{k,j_0} = 0$.

   Puis, pour $i \in \mathbb{N}$ entre 1 et $l$, on a :

$$\sum_{k=1}^{j_0-1} a_{k,j_0} \cdot a_{i,k} = \sum_{k=1}^{j_0-1} a_{k,j_0} \cdot \delta_{k}^{i}.$$

   On distingue deux cas :
   (a) si $i < j_0$, on a :

$$\textstyle\sum_{k=1}^{j_0-1} a_{k,j_0} \cdot a_{i,k} = a_{i,j_0}$$

(b) si $i \geq j_0$, on a :

$$\sum_{k=1}^{j_0-1} a_{k,j_0} \cdot a_{i,k} = 0,$$
$$\sum_{k=1}^{j_0-1} a_{k,j_0} \cdot a_{i,j} = a_{i,j_0}.$$

Dans les deux cas,

$$\sum_{k=1}^{j_0-1} a_{k,j_0} \cdot a_{i,k} = a_{i,j_0}.$$

Ainsi la colonne $j_0$ est la combinaison linéaire des colonnes 1 à $j_0 - 1$ avec les coefficients $a_{1,j_0}$ à $a_{j_0-1,j_0}$.
Puis les colonnes de $A$ ne sont pas libres.
$A$ n'est pas inversible à gauche.

□

**Proposition 33**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice à valeur dans $\mathbb{K}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $A$ a un inverse à gauche ;
2. $A$ peut s'écrire sous la forme $B \times \mathrm{I}_{m,n}$ où $B$ est le produit de 0, une, ou plusieurs matrices de transformation élémentaire, toutes carrées et de taille $m$.

*Démonstration.* En exercice. □

**Algorithme 2 –** inversion à gauche

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

1. On utilise l'algorithme 1 permet de vérifier si $A$ a un inverse à gauche.
2. — soit la matrice n'est pas inversible ;
   — soit la matrice est inversible :
   (a) on a calculé une matrice $B \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{K})$ carrée de taille $m$ et à valeur dans $\mathbb{K}$ qui vérifie : $B \times A = \mathrm{I}_{m,n}$ ;
   (b) on calcule $B \times \mathrm{I}_{m,m}$ en faisant agir les mêmes transformations élémentaires qui ont transformé $A$ en $\mathrm{I}_{m,n}$ sur $\mathrm{I}_{m,m}$ ;
   (c) l'ensemble des inverses à gauche de $A$ est alors l'ensemble des matrices $C \times B \times \mathrm{I}_{m,m}$ pour chaque matrice $C := (c_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ de taille $n \times m$ à valeur dans $\mathbb{K}$ et telle que pour tout $i$ tel que $1 \leq i \leq n$ et pour tout $j$ tel

que $1 \leq i \leq n$, on ait $c_{i,j} = \delta^i_j$.

*Démonstration.* En exercice. $\square$

**Exemple 16**

Reprenons l'exemple 12. On fait agir en parallèle les mêmes transformations sur la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

et la matrice $\mathrm{I}_{m,m}$ :

| | | |
|---|---|---|
| | $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| $L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_1$ <br> $L_3 \leftarrow L_3 - 3 \cdot L_1$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| $L_2 \leftarrow \frac{-1}{3} \cdot L_2$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| $L_1 \leftarrow L_1 - 2 \cdot L_2$ <br> $L_3 \leftarrow L_3 + 2 \cdot L_2$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ \frac{-5}{3} & \frac{-2}{3} & 1 \end{pmatrix}$ |

Puis les inverses à gauche de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

sont les matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ \frac{-5}{3} & \frac{-2}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis les inverses à gauche de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

sont les matrices :

$$\begin{pmatrix} -\frac{1+5a}{3} & -\frac{2+2a}{3} & a \\ \frac{2-5b}{3} & -\frac{1+2b}{3} & b \end{pmatrix}.$$

**Lemme 1**

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soient $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq k' \leq n$. Soit $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice carrée de transformation élémentaire et de taille $n$. Alors il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ carrée de transformation élémentaire et telle que :

$$\mathrm{SWAP}_n(k, k') \times B = C \times \mathrm{SWAP}_n(k, k')$$

*Démonstration.* Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soient $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq k' \leq n$. Soit $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice carrée de transformation élémentaire et de taille $n$.

On note :

$$\sigma := \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} & \\ l & \mapsto & l & \text{si } l \notin \{k, k'\} \\ l & \mapsto & k' & \text{si } l = k \\ l & \mapsto & k & \text{si } l = k'. \end{cases}$$

On distingue plusieurs cas sur la forme de $B$ :

1. si $B = \mathrm{I}_{n,n}$,
   on a : $\mathrm{SWAP}_n(k, k') \times \mathrm{I}_{n,n} = \mathrm{I}_{n,n} \times \mathrm{SWAP}_n(k, k')$ ;
2. si $B$ est une matrice de permutation,
   soient $l$ et $l'$ entre 1 et $n$, tels que $B = \mathrm{SWAP}_n(l, l')$,
   on a : $\mathrm{SWAP}_n(k, k') \times \mathrm{SWAP}_n(l, l') = \mathrm{SWAP}_n(\sigma l, \sigma l') \times \mathrm{SWAP}_n(k, k')$ ;

3. si $B$ est une matrice de dilatation,
   soient $l$ entre 1 et $n$ et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$,
   on a : $\text{SWAP}_n(k,k') \times \text{DILAT}_n(l,\lambda) = \text{DILAT}_n(\sigma(l),\lambda) \times \text{SWAP}_n(k,k')$ ;
4. si $B$ est une matrice de d'ajout,
   soient $l,l'$ entre 1 et $n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,
   on a : $\text{SWAP}_n(k,k') \times \text{ADD}_n(l,l',\lambda) = \text{ADD}_n(\sigma l, \sigma l', \lambda)$.

$\square$

**Lemme 2**

Soient $m,n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $B \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{K})$ une matrice carrée de transformation élémentaire, de taille $m$, qui n'est pas une matrice de permutation. Alors il existe une matrice carrée $C \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ de transformation élémentaire, de taille $n$ telle que $B \times \mathrm{I}_{m,n} = \mathrm{I}_{m,n} \times C$.

*Démonstration.* En exercice $\square$

**Théorème 1**

Soit $m,n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice à valeur dans $\mathbb{K}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $A$ est inversible à gauche ;
2. $m \geq n$ et $A$ peut s'écrire sous la forme $B \times \mathrm{I}_{m,n}$ où $B$ est le produit de 0, une, ou plusieurs matrices de transformation élémentaire, toutes carrées et de taille $m$ ;
3. les lignes de $A$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ ;
4. les colonnes de $A$ forment une famille libre dans $\mathbb{R}^m$ ;
5. pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $A \times X = (0)_{1 \leq i \leq n, j=1}$, on a $X = (0)_{1 \leq i \leq m, j=1}$ ;
6. pour toute matrice $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ telle que ${}^{T}A \times X = Y$.

## 3.3 Inverse à droite

**Algorithme 3 – inversion à droite**

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans $\mathbb{K}$. On utilise l'algorithme 2 pour décider si la transposée de $A$ est inversible à gauche, et calculer ses inverses à gauche.

1. si ${}^{T}A$ n'est pas inversible à gauche, alors $A$ n'est pas inversible à droite ;
2. les inverses à droites de $A$ sont alors les transposées des inverses à gauche de ${}^{T}A$.

*Démonstration.* En exercice. □

**Théorème 2**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice à valeur dans $\mathbb{K}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $A$ est inversible à droite ;
2. $m \leq n$ et $A$ peut s'écrire sous la forme $\mathrm{I}_{m,n} \times B$ où $B$ est le produit de 0, une, ou plusieurs matrices de transformation élémentaire, toutes carrées et de taille $n$ ;
3. les colonnes de $A$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^m$ ;
4. les lignes de $A$ forment une famille libre dans $\mathbb{R}^n$ ;
5. pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ telle que ${}^{T}A \times X = (0)_{1 \leq i \leq n, j=1}$, on a $X = (0)_{1 \leq i \leq m, j=1}$ ;
6. pour toute matrice $Y \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$, il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $A \times X = Y$.

## 3.4 Inverses

**Proposition 34**

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice carrée de taille $n$ et à valeur dans $\mathbb{K}$. Alors $A$ est inversible à gauche si et seulement si $A$ est inversible à droite.

*Démonstration.* Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice carrée de taille $n$ et à valeur dans $\mathbb{K}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $A$ est inversible à gauche ;
2. les lignes de $A$ forment une famille génératrice de $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ;
3. les lignes de $A$ forment une famille libre dans $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ; (pour des raisons de dimensions)
4. $A$ est inversible à droite.

□

**Proposition 35**

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice carrée de taille $n$ et à valeur dans $\mathbb{K}$. Alors un inverse à gauche de $A$ est aussi un inverse à droite de $A$ (et réciproquement).

*Démonstration.* Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice carrée de taille $n$ et à valeur dans $\mathbb{K}$. Soit $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ un inverse à gauche de $A$. On sait que $A$ est inversible à gauche. Donc il est aussi inversible à droite. Soit $C \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ un inverse à droite. On sait par la propriété 26, que $B = C$. □

**Proposition 36**

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Alors les matrices inversibles de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ sont les matrices obtenues comme produit d'un nombre arbitraire de matrices élémentaires carrées de taille $n$.

**Algorithme 4 –** pivot de Gauss sur une matrice carrée

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice carrée de taille $n$ à valeur dans $\mathbb{K}$.
On suppose que $n \geq 1$.

1. On pose $p = 1$, $X_0 = A$, et $Y_0 = \mathrm{I}_{n,n}$.
2. Si $p = n + 1$, $A$ est inversible, et son inverse est $Y_n$.
3. On note $X_{p-1} = (x_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$.
4. Si pour tout $i \geq p$, $x_{i,p} = 0$ alors la matrice $A$ n'est pas inversible.
5. On prends le plus petit indice $i_0$ tel que $i_0 \geq p$ et tel que $x_{i_0,p} \neq 0$.
6. On permute la ligne $p$ et la ligne $i_0$ à la fois dans la matrice $X_{p-1}$ et dans la matrice $Y_{p-1}$.

7. On utilise la ligne $p$ pour annuler le reste de la colonne $j_0$ dans la matrice $X_{p-1}$, tout en effectuant les mêmes transformations dans la matrice $Y_{p-1}$
8. On pose $X_p$ et $Y_p$ les matrices obtenues.
9. $p \leftarrow p+1$,

*Démonstration.* On a appliqué l'algorithme 1, en remarquant que si on forme une colonne qui s'annule sur toutes les lignes qui n'ont pas encore de pivots, alors on ne peut pas obtenir la matrice $\mathrm{I}_{n,n}$ à la fin. On prouve, en case de succès de l'algorithme, que pour tout $p$, on a : $A = Y_p \times A_p$. Puis, $Y_n$ est l'inverse de $A$. □

**Exemple 17**

La matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible.
En effet,

| | |
|---|---|
| | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ |
| $L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_1$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ |
| $L_2 \leftarrow \frac{-1}{3} \cdot L_2$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ |
| $L_1 \leftarrow L_1 - 2 \cdot L_2$<br>$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |

Cette dernière matrice n'est pas inversible, car elle a une ligne nulle (donc ces lignes ne forment pas une famille libre de $\mathbb{R}^3$).

**Exemple 18**

La matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

est inversible.
On trouve son inverse par pivot de Gauss :

| | | |
|---|---|---|
| | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| $L_2 \leftrightarrow L_3$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| $L_1 \leftarrow L_1 - 2 \cdot L_2$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$<br>$L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_3$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ |

.

On peut vérifier que la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est l'inverse de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & 2 & 3 \\ & & & 1 & 2 & 4 \\ & & & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & -2 & 1 & 2-2 & 4-4 \\ 2 & -2 & 1 & 2-2 & 4-4+1 & 6-8+2 \\ -1 & 1 & 0 & -1+1 & -2+2 & -3+4 \end{array}.$$

**Théorème 3**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice à valeur dans $\mathbb{K}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $A$ est inversible ;
2. $A$ peut s'écrire sous la forme d'un produit de 0, une, ou plusieurs matrices de transformation élémentaire, toutes carrées et de taille $n$ ;
3. $m \geq n$ et les colonnes de $A$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^m$ ;
4. $m \leq n$ et les colonnes de $A$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^m$ ;
5. $m \geq n$ et les lignes de $A$ forment une famille libre dans $\mathbb{R}^n$ ;
6. $m \leq n$ et les lignes de $A$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.
7. $m \geq n$ et pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ telle que ${}^T A \times X = (0)_{1 \leq i \leq n, j=1}$, on a $X = (0)_{1 \leq i \leq m, j=1}$ ;
8. $m \geq n$ et pour toute matrice $Y \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$, il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $A \times X = Y$.
9. $m \leq n$ et pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $A \times X = (0)_{1 \leq i \leq m, j=1}$, on a $X = (0)_{1 \leq i \leq n, j=1}$ ;
10. $m \leq n$ et pour toute matrice $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ telle que ${}^T A \times X = Y$.

# 4 Déterminant

On va voir uniquement la preuve en dimension 2 et 3. Attention à ne pas généraliser à l'arrache !

## 4.1 Généralités

**Définition 17 – Permutation**

Soit $E$ un ensemble, une permutation de $E$ est une bijection de $E$ dans $E$.

**Définition 18 – Groupe symétrique**

On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$. Cet ensemble est appelé groupe symétrique d'ordre $n$.

**Proposition 37**

$(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe.

**Définition 19 – Signature d'une permutation**

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On appelle signature de $\sigma$, notée $\varepsilon(\sigma)$ la valeur

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \operatorname{sign}\left(\sigma(j) - \sigma(i)\right)$$

où

$$\operatorname{sign} : \begin{cases} x \mapsto 1 & \text{si x > 0} \\ x \mapsto -1 & \text{si x < 0} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Définition 20 – Déterminant**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le déterminant d'une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ se note

$$|A|$$

ou

$$\det A$$

et vaut

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

**Théorème 4**

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})^2$,

$$\det A \det B = \det AB$$

## 4.2 En dimension 2

**Théorème 5**

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

le déterminant de $A$ est noté

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$$

et vaut

$$a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$$

## 4.3 En dimension 3

**Théorème 6**

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

le déterminant de $A$ est noté

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

et vaut

$$a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}$$

La figure 1 (p. 34) montre un bon moyen de retrouver cette formule.

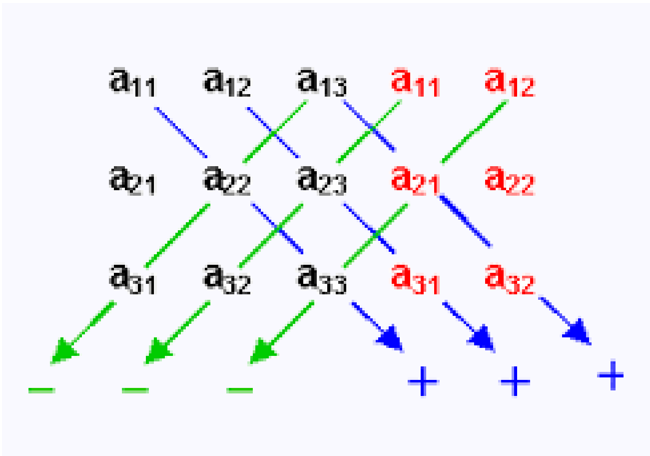


FIGURE 1 – Règle de SARRUS

## 4.4 En dimension supérieure

**Théorème 7**

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments diagonaux.

**Proposition 38**

$$\det \mathrm{I}_{n,n} = 1$$

**Proposition 39**

Le déterminant des matrices $\mathrm{SWAP}_a(b,c)$ est 1.

**Proposition 40**

Le déterminant des matrices $\mathrm{DILAT}_a(b,c)$ est $c$.

**Proposition 41**

Le déterminant des matrices $\mathrm{ADD}_a(b,c,d)$ est 1.

En utilisant le pivot de GAUSS, on peut exprimer toute matrice comme le produit de matrices de transformations élémentaires et d'une triangulaire supérieure, rendant ainsi possible le calcul du déterminant.

**Théorème 8**

Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

**Proposition 42**

Soit $A$ une matrice inversible.

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$$

**Proposition 43**

Soit $A$ une matrice.

$$\det {}^{T}A = \det A$$

On peut donc déduire le déterminant en utilisant l'algorithme de GAUSS. Il suffit de faire le produit des déterminants des matrices de transformation élémentaire qu'on utilise.