Matrices

Marc CHEVALIER
DI ENS
sur une idée originale de Jérôme FERET

19 mars 2018

Table des matières

1 Algèbre des matrices

Définition 1 – matrice

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. On appelle une matrice d'éléments de $\mathbb{K}$ à m lignes et à n colonnes une famille d'éléments $(a_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ de $\mathbb{K}$ indexée par les couple (i, j) où i varie entre 1 et m, et j varie entre 1 et n.
On dit aussi que $(a_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ est une matrice de taille $m \times n$.
On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de tailles $m \times n$ d'élément de $\mathbb{K}$.
Enfin, lorsque $m = n$, on dit que les matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sont carrés de taille m.

Définition 2 – ligne

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A := (a_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$. Soit i_0 un entier entre 1 et m. On appelle i_0-ième ligne de A, la famille de n éléments de $\mathbb{K}$ $(a_{i_0,j})_{1\leq j\leq n}$.

Définition 3 – colonne

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs Soit $A := (a_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$. Soit j_0 un entier entre 1 et n. On appelle j_0-ième colonne de A, la famille de m éléments de $\mathbb{K}$ $(a_{i,j_0})_{1\leq i\leq m}$.

Définition 4 – somme

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On note $A := (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ et $B := (b_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. La matrice $(a_{i,j} + b_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ est appelée la somme des deux matrices A et B. On la note $A + B$.

Définition 5 – produit externe

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On note $A := (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. La matrice $(\lambda \cdot a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ est appelée le produit de la matrice A par le scalaire λ. On la note $\lambda \cdot A$.

Définition 6

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit k un entier entre 1 et m et soit k' un entier entre 1 et n. On note $E_{k,k'} := (\delta_i^k \cdot \delta_j^{k'})$ la matrice de taille $m \times n$ dont tous les éléments sont nuls, sauf dans la case à la ligne k et à la colonne k' dans laquelle la valeur est 1.

Proposition 1

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $m \cdot n$. De plus, la famille des matrices élémentaire $(E_{i,j}^{m,n})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ est une base de $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$.

Définition 7 – produit interne

Soient $m, n, o \in \mathbb{N}$ trois entiers positifs. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,o}(\mathbb{K})$. On note $A := (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ et $B := (b_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq o}$. La matrice $(c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,o}(\mathbb{K})$ définie par :

$$c_{i,j} := \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \cdot b_{k,j},$$

pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq o$, est appelée le produit entre A et B, et est notée $A \times B$.

Proposition 2

Soient $m, n, o, p \in \mathbb{N}$ quatre entiers. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,o}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{o,p}(\mathbb{K})$ trois matrices à valeur dans $\mathbb{K}$.

Alors :

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C.$$

Proposition 3

Soient $m, n, o \in \mathbb{N}$ trois entiers naturels. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans $\mathbb{K}$. La fonction $\phi : \mathcal{M}_{n,o}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{m,o}(\mathbb{K})$ qui à toute matrice $B \in \mathcal{M}_{n,o}(\mathbb{K})$ de taille $n \times o$ à valeur dans $\mathbb{K}$ associe la matrice $A \times B$ est une application linéaire entre $(\mathcal{M}_{n,o}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ et $(\mathcal{M}_{m,o}(\mathbb{K}), +, \cdot)$.

Définition 8 – transposée

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de $\mathbb{K}$. On note $A := (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. La matrice $(a_{j,i})_{1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m}$ est une matrice de taille $n \times m$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Cette matrice est appelée la transposée de A et est noté ${}^{T}A$.

Proposition 4

Soient $m, n, o \in \mathbb{N}$ trois entiers positifs. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,o}(\mathbb{K})$ deux matrices de tailles $m \times n$ et $n \times o$, et d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors, on a :

$${}^{T}(M \times N) = {}^{T}N \times {}^{T}M.$$

Proposition 5

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice à valeur dans $\mathbb{K}$ et de taille $m \times n$. Alors, on a :

$${}^{T}({}^{T}A) = A.$$

Proposition 6

Soient $m, n, o \in \mathbb{N}$ trois entiers naturels. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,o}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $n \times o$ à valeur dans $\mathbb{K}$. La fonction $\phi : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{m,o}(\mathbb{K})$ qui à toute matrice $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de taille $m \times o$ à valeur dans $\mathbb{K}$ associe la matrice $B \times A$ est une application linéaire entre $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ et $(\mathcal{M}_{m,o}(\mathbb{K}), +, \cdot)$.

2 Transformations élémentaires

2.1 Matrice identité

Définition 9 – identité

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. On note $\mathrm{I}_{m,n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ la matrice carrée $(\delta_i^j)_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$.

Proposition 7

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On a : $A = \mathrm{I}_{m,m} \times A$.

Proposition 8

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On a : $A = A \times \mathrm{I}_{n,n}$.

Proposition 9

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs tels que $m \leq n$, alors $\mathrm{I}_{m,n} \times \mathrm{I}_{n,m} = \mathrm{I}_{m,m}$.

2.2 Permutation de lignes et de colonnes

Définition 10 – matrice de permutation

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient k et k' deux entiers entre 1 et n. On note $\textsc{Swap}_n(k, k')$ la matrice $\mathrm{I}_{n,n} - \mathrm{E}_{k,k}^{n,n} - \mathrm{E}_{k',k'}^{n,n} + \mathrm{E}_{k,k'}^{n,n} + \mathrm{E}_{k',k}^{n,n}$.

Proposition 10 – permutation de lignes

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soient k, k' deux entiers compris entre 1 et m. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors la matrice $\textsc{Swap}_m(k, k') \times A$ est la matrice dont la l-ième ligne est la l-ième ligne de A pour $l \notin \{k, k'\}$, la k-ième ligne est la k'-ième ligne de A, et la k'-ième ligne est la k-ième ligne de A.

Proposition 11 – permutation de colonnes

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soient k, k' deux entiers compris entre 1 et n. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors la matrice $A \times \mathrm{S\small{WAP}}_n(k, k')$ est la matrice dont la l-ième colonne est la l-ième colonne de A pour $l \notin \{k, k'\}$, la k-ième colonne est la k'-ième colonne de A, et la k-ième colonne est la k'-ième colonne de A.

Proposition 12

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier. Soient k, k' deux entiers compris entre 1 et n. On a :

$$(\mathrm{S\small{WAP}}_n(k, k'))^2 = \mathrm{I}_{n,n}$$

2.3 Multiplication d'une ligne ou d'une colonne par un scalaire

Définition 11 – matrice de dilatation

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient k un entier entre 1 et n et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ un scalaire non nul. On note $\mathrm{D\small{ILAT}}_n(k, \lambda)$ la matrice $\mathrm{I}_{n,n} + (\lambda - 1) \cdot \mathrm{E}_{k,k}^{n,n}$.

Proposition 13 – dilatation de lignes

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soient k un entier compris entre 1 et m et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ un scalaire non nul. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors la matrice $\mathrm{D\small{ILAT}}_m(k, \lambda) \times A$ est la matrice dont la l-ième ligne est la l-ième ligne de A pour $l \neq k$, la k-ième ligne est la k-ième ligne de A multipliée par le scalaire λ.

Proposition 14 – dilatation de colonnes

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soit k, k' deux entiers compris entre 1 et n et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ un scalaire non nul. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors la matrice $A \times \mathrm{D\small{ILAT}}_n(k, \lambda)$ est la matrice dont la l-ième colonne est la l-ième colonne de A pour $l \neq k$, la k-ième colonne est la k-ième colonne de A multipliée par le scalaire λ.

Proposition 15

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier, soit k un entier entre 1 et n, et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K} \in \setminus\{0\}$ deux scalaires non nuls. Alors $\mathrm{D\small{ILAT}}_n(k, \lambda) \times \mathrm{D\small{ILAT}}_n(k, \mu) =$

$\text{DILAT}_n(k, \lambda \cdot \mu)$.

2.4 Ajout de lignes et de colonnes

Définition 12 – matrice de combinaison

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient k et k' deux entiers distincts entre 1 et n et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. On note $\text{ADD}_n(k, k', \lambda)$ la matrice $\mathrm{I}_{n,n} + \lambda \cdot \mathrm{E}^{n,n}_{k,k'}$.

Proposition 16 – ajout d'une ligne

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soient k, k' deux entier distincts compris entre 1 et m, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors la matrice $\text{ADD}_m(k, k', \lambda) \times A$ est la matrice dont la l-ième ligne est la l-ième ligne de A pour $l \neq k$, la k-ième ligne est la k-ième ligne de A plus la k'-ième ligne de A multipliée par le scalaire λ.

Proposition 17 – ajout d'une colonne

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soit k, k' deux entiers distincts compris entre 1 et n et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors la matrice $A \times \text{ADD}_n(k, k', \lambda)$ est la matrice dont la l-ième colonne est la l-ième colonne de A pour $l \neq k'$, la k'-ième colonne est la k'-ième colonne de A plus la k-ième colonne de A multipliée par le scalaire λ.

Proposition 18

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier, soit k, k' deux entiers distincts entre 1 et n, et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ deux scalaires. Alors $\text{ADD}_n(k, k', \lambda) \times \text{ADD}_n(k, k', \mu) = \text{ADD}_n(k, k', \lambda + \mu)$.

3 Matrices inversibles

3.1 Inversibilité à gauche et à droite

Définition 13 – matrice inversible à gauche

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans $\mathbb{K}$. On dit que A est inversible à gauche si et seulement si il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ de taille $n \times m$ à valeur dans $\mathbb{K}$ telle que $B \times A = \mathrm{I}_{n,n}$.
La matrice B est alors appelée un inverse à gauche de A.

Définition 14 – matrice inversible à droite

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans $\mathbb{K}$. On dit que A est inversible à droite si et seulement si il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ de taille $n \times m$ à valeur dans $\mathbb{K}$ telle que $A \times B = \mathrm{I}_{m,m}$.
La matrice B est alors appelée un inverse à droite de A.

Proposition 19

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans $\mathbb{K}$. La matrice A est inversible à gauche si et seulement si la matrice ${}^{T}A$ est inversible à droite.
De plus, soit $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $n \times m$ à valeur dans $\mathbb{K}$. Alors la matrice B est un inverse à gauche de A si et seulement si la matrice ${}^{T}B$ est un inverse à droite de ${}^{T}A$.

Définition 15 – matrice inversible

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans $\mathbb{K}$. On dit que A est inversible si et seulement si il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ telle que $A \times B = \mathrm{I}_{m,m}$ et $B \times A = \mathrm{I}_{n,n}$.
La matrice B est alors appelée un inverse de A.

3.2 Inversion à gauche

Définition 16

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de taille $m \times n$ est dite échelonnée, si et seulement si il existe une fonction PIVOT qui associe à chaque indice de ligne de A non nulle un indice de colonne, tel que :

1. Pour chaque ligne non nulle d'indice i, la première colonne non nulle a pour indice $\text{PIVOT}(i)$.
2. Pour chaque ligne non nulle d'indice i, $A_{i,\text{PIVOT}(i)} = 1$.
3. Pour chaque ligne i non nulle, $A_{i,\text{PIVOT}(i)}$ est le seul élément non nul de la colonne $\text{PIVOT}(i)$.
4. Pour chaque paire de lignes non nulles, d'indice i et j, on a : $i < j \implies \text{PIVOT}(i) < \text{PIVOT}(j)$.
5. Les lignes nulles, si il y en a, sont à la fin de la matrice.

Algorithme 1 – pivot de Gaus

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$. Alors, quitte à permuter les lignes de A, multiplier les lignes de A par une constante non nulle, et ajouter à une ligne une autre ligne multipliée par une constante, alors on peut écrire A sous forme échelonnée.
On suppose $m \geq 1$ et $n \geq 1$.

1. Posons $p \leftarrow 1$.
2. Si A n'est pas échelonnée, on prend la première colonne j_0 telle qu'il existe une ligne i_0 telle que $a_{i,j} \neq 0$, avec $i \geq p$.
3. On permute la ligne p et la ligne i_0.
4. On utilise la ligne p pour annuler le reste de la colonne j_0.
5. On pose $p \leftarrow p + 1$.

Algorithme 2 – inversion à gauche

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

1. On utilise l'algorithme **??** permet de vérifier si A a un inverse à gauche.

2. — soit la matrice n'est pas inversible ;
   — soit la matrice est inversible :
     (a) on a calculé une matrice $B \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{K})$ carrée de taille m et à valeur dans $\mathbb{K}$ qui vérifie : $B \times A = \mathrm{I}_{m,n}$;
     (b) on calcule $B \times \mathrm{I}_{m,m}$ en faisant agir les mêmes transformations élémentaires qui ont transformé A en $\mathrm{I}_{m,n}$ sur $\mathrm{I}_{m,m}$;
     (c) l'ensemble des inverses à gauche de A est alors l'ensemble des matrices $C \times B \times \mathrm{I}_{m,m}$ pour chaque matrice $C := (c_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ de taille $n \times m$ à valeur dans $\mathbb{K}$ et telle que pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$ et pour tout j tel que $1 \leq i \leq n$, on ait $c_{i,j} = \delta^i_j$.

Lemme 1

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soient $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq k' \leq n$. Soit $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice carrée de transformation élémentaire et de taille n. Alors il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ carrée de transformation élémentaire et telle que :

$$\textsc{Swap}_n(k,k') \times B = C \times \textsc{Swap}_n(k,k')$$

Lemme 2

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $B \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{K})$ une matrice carrée de transformation élémentaire, de taille m, qui n'est pas une matrice de permutation. Alors il existe une matrice carrée $C \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ de transformation élémentaire, de taille n telle que $B \times \mathrm{I}_{m,n} = \mathrm{I}_{m,n} \times C$.

Théorème 1

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice à valeur dans $\mathbb{K}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est inversible à gauche ;
2. $m \geq n$ et A peut s'écrire sous la forme $B \times \mathrm{I}_{m,n}$ où B est le produit de 0, une, ou plusieurs matrices de transformation élémentaire, toutes carrées et de taille m ;
3. les lignes de A forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$;
4. les colonnes de A forment une famille libre dans $\mathbb{R}^m$;
5. pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $A \times X = (0)_{1 \leq i \leq n, j=1}$,

on a $X = (0)_{1\leq i\leq m, j=1}$;

6. pour toute matrice $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ telle que ${}^{T}A \times X = Y$.

3.3 Inverse à droite

Algorithme 3 – inversion à droite

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans $\mathbb{K}$. On utilise l'algorithme **??** pour décider si la transposée de A est inversible à gauche, et calculer ses inverses à gauche.

1. si ${}^{T}A$ n'est pas inversible à gauche, alors A n'est pas inversible à droite ;
2. les inverses à droites de A sont alors les transposées des inverses à gauche de ${}^{T}A$.

Théorème 2

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice à valeur dans $\mathbb{K}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est inversible à droite ;
2. $m \leq n$ et A peut s'écrire sous la forme $\mathrm{I}_{m,n} \times B$ où B est le produit de 0, une, ou plusieurs matrices de transformation élémentaire, toutes carrées et de taille n ;
3. les colonnes de A forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^m$;
4. les lignes de A forment une famille libre dans $\mathbb{R}^n$;
5. pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ telle que ${}^{T}A \times X = (0)_{1\leq i\leq n, j=1}$, on a $X = (0)_{1\leq i\leq m, j=1}$;
6. pour toute matrice $Y \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$, il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $A \times X = Y$.

3.4 Inverses

Algorithme 4 – pivot de Gauss sur une matrice carrée

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice carrée de taille n à valeur dans $\mathbb{K}$.
On suppose que $n \geq 1$.

1. On pose $p = 1$, $X_0 = A$, et $Y_0 = \mathrm{I}_{n,n}$.
2. Si $p = n + 1$, A est inversible, et son inverse est Y_n.
3. On note $X_{p-1} = (x_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$.
4. Si pour tout $i \geq p$, $x_{i,p} = 0$ alors la matrice A n'est pas inversible.
5. On prends le plus petit indice i_0 tel que $i_0 \geq p$ et tel que $x_{i_0,p} \neq 0$.
6. On permute la ligne p et la ligne i_0 à la fois dans la matrice X_{p-1} et dans la matrice Y_{p-1}.
7. On utilise la ligne p pour annuler le reste de la colonne j_0 dans la matrice X_{p-1}, tout en effectuant les mêmes transformations dans la matrice Y_{p-1}
8. On pose X_p et Y_p les matrices obtenues.
9. $p \leftarrow p + 1$,

Théorème 3

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice à valeur dans $\mathbb{K}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est inversible ;
2. A peut s'écrire sous la forme d'un produit de 0, une, ou plusieurs matrices de transformation élémentaire, toutes carrées et de taille n ;
3. $m \geq n$ et les colonnes de A forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^m$;
4. $m \leq n$ et les colonnes de A forment une famille libre de $\mathbb{R}^m$;
5. $m \geq n$ et les lignes de A forment une famille libre dans $\mathbb{R}^n$;
6. $m \leq n$ et les lignes de A forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.
7. $m \geq n$ et pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ telle que ${}^{T}A \times X = (0)_{1 \leq i \leq n, j=1}$, on a $X = (0)_{1 \leq i \leq m, j=1}$;
8. $m \geq n$ et pour toute matrice $Y \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$, il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $A \times X = Y$.

9. $m \leq n$ et pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $A \times X = (0)_{1 \leq i \leq m, j=1}$, on a $X = (0)_{1 \leq i \leq n, j=1}$;
10. $m \leq n$ et pour toute matrice $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ telle que ${}^{T}A \times X = Y$.