DM de logique, théorie des ensembles et fonction

Rendez les exercices dans l'ordre ou chacun sur une feuille séparée (pas tous ensemble en vrac). Ne perdez pas de temps sur les bonus : ce sont des questions intéressantes, mais parfois plus difficiles.

Le barème est indicatif. Il n'est pas nécessaire de tout faire pour obtenir une bonne note. Comme le DM est assez long, la notation sera probablement non linéaire.

Exercice 1 : Logique propositionnelle (20 points)

1. Montrer que
$$(\varphi \Rightarrow \bot) \equiv (\neg\varphi)$$
Ne pas hésiter à commenter.
2. Prouver la loi de PIERCE :
$$\Big(\big((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi\big) \Rightarrow \varphi\Big)$$
3. Prouver
$$\big(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)\big) \equiv \big((A \wedge B) \Rightarrow C\big)$$
4. Prouver que $\varphi \equiv \psi$ si et seulement si $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ est une tautologie.
5. Soit φ la formule
$$\Big(\big((P \Rightarrow (\neg Q)) \Rightarrow (\neg P)\big) \wedge R\Big)$$
   (a) Écrire φ sous forme d'arbre
   (b) Donner la table de vérité de φ
   (c) Cette formule est elle une tautologie ? Justifier.
   (d) Cette formule est elle une contradiction ? Justifier.
6. (a) Montrer les lois de BOOLE :
$$\big((A \vee B) \wedge C\big) \equiv \big((A \wedge C) \vee (B \wedge C)\big)$$
$$\big((A \wedge B) \vee C\big) \equiv \big((A \vee C) \wedge (B \vee C)\big)$$
   C'est la distributivité de $\vee$ par rapport à $\wedge$ et la distributivité de $\wedge$ par rapport à $\vee$.

(b) Montrer que $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$ et $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$. C'est la commutativité de $\vee$ et $\wedge$

(c) Montrer que $\big((A \wedge B) \wedge C\big) \equiv \big(A \wedge (B \wedge C)\big)$ et $\big((A \vee B) \vee C\big) \equiv \big(A \vee (B \vee C)\big)$. C'est l'associativité de $\vee$ et $\wedge$.

7. Quel(s) entier(s) de l'intervalle $[\![2, 40]\!]$ vérifie l'implication :

$$\big(n \text{ est multiple de } 10 \ \Rightarrow (n+1) \text{ est premier}\big)$$

Exercice 2 : Fonctions (15 points)

1. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} \setminus \{-3\} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{iz - i}{z+3} \end{aligned}$$

   (a) Montrer que f est injective.

   (b) Déterminer E tel que

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C} \setminus \{-3\} &\to E \\ z &\mapsto f(z) \end{aligned}$$

   est bijective.

   (c) Déterminer la bijection réciproque de g.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose f strictement croissante. Montrer que f est injective.

3. (5 points bonus)

   (a) Montrer qu'il existe une bijection entre $]0, 1[$ et $\mathbb{R}$.

   (b) Existe-t-il une bijection entre $[0; 1]$ et $]0; 1[$? Justifier

Exercice 3 : Relations (15 points)

1. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $x\mathscr{R}y$ si et seulement si $x^2 - y^2 = x - y$.

   (a) Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer la classe d'équivalence de x.

2. On définit sur $\mathbb{N}^2$ la relation $\sqsubseteq$ par

$$(x, y) \sqsubseteq (x', y') \Leftrightarrow \Big(x < x' \vee \big(x = x' \wedge y \leqslant y' \big) \Big)$$

   (a) Démontrer que $\sqsubseteq$ est une relation d'ordre.
   (b) (5 points bonus) Montrer que cet ordre est bien fondé.
   (c) (5 points bonus) Est ce que cette relation est toujours une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}^2$? Est ce encore un ordre bien fondé ?

Exercice 4 : Théorie des ensembles (15points)

1. Dessiner les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$
   (a) $\complement \left([-1, 1] \times [-1, 1] \right)$
   (b) $\Big(\complement [-1, 1] \Big) \times \Big(\complement [-1, 1] \Big)$
   (c) $\Big\{ (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \;\Big|\; a^2 + b^2 \leqslant 4 \Big\}$
2. Décrire formellement chacune de ces trois parties de $\mathbb{R}^2$. La croix n'étant qu'un seul ensemble et ses branches sont infinies (ici coupées par le cadre de l'image).

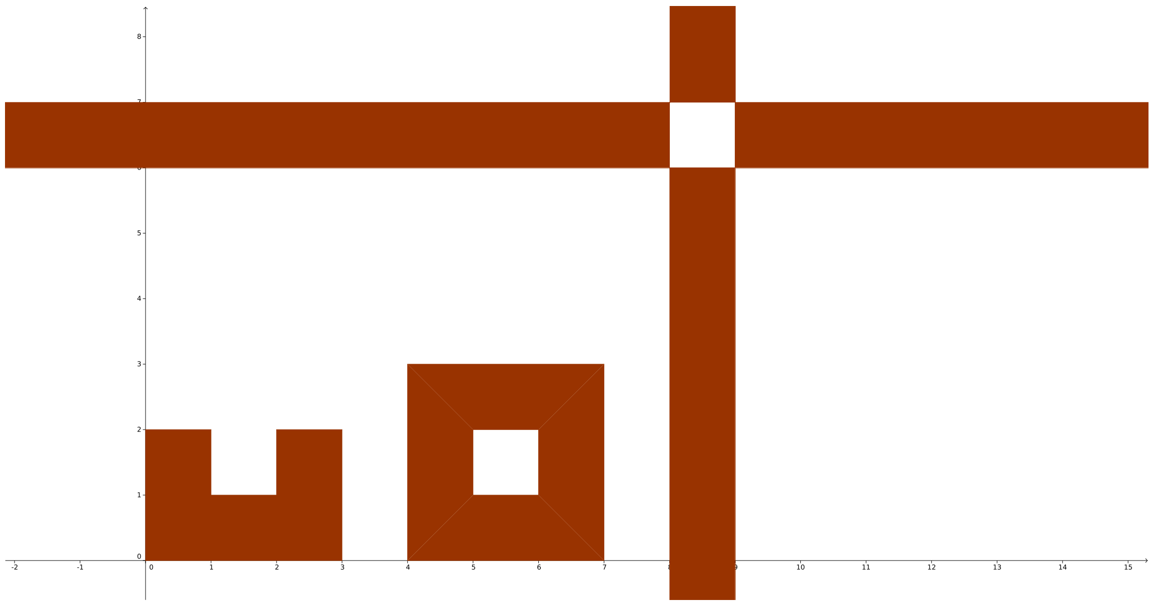

FIGURE 1 – Les parties

3. Soit E un ensemble. On appelle fonction caractéristique de $A \subseteq E$ l'application :

$$\begin{aligned} \varphi_A : E &\to \{0,1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

   On remarque que toute fonction définie sur E est une fonction caractéristique d'une partie de E si et seulement si f est à valeur dans $\{0,1\}$. Si f est une fonction caractéristique, elle décrit l'ensemble $\left\{x \in E \,\middle|\, f(x) = 1\right\}$.

   Soit A et B deux parties de E. Trouver lesquelles des fonctions ci-dessous sont des fonctions caractéristiques et dans ce cas, les ensembles caractérisés.

   (a) $1 - \varphi_A$

   (b) $\min(\varphi_A, \varphi_B)$

   (c) $\max(\varphi_A, \varphi_B)$

   (d) $\varphi_A \varphi_B$

   (e) $\varphi_A + \varphi_B$

   (f) $\varphi_A - \varphi_B$

(g) (2 points bonus) $\varphi_A + \varphi_B - \varphi_A \varphi_B$

(h) (2 points bonus) $(\varphi_A - \varphi_B)^2$

4. (5 points bonus) Exprimer la proposition $\exists ! x \in E : P(x)$ uniquement avec les quantificateurs $\exists$ et $\forall$.

Exercice 5 : Récurrence (15 points)

1. Prouver que $\forall n \geqslant 4, n < 2^n < n!$. Où $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ (NB : $0! = 1$). On pourra utiliser sans justifier que $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$.
2. Prouver que pour tout entier naturel n

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, (1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

3. (5 points bonus) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6.