DM de logique, théorie des ensembles et fonction

Rendez les exercices dans l'ordre ou chacun sur une feuille séparée (pas tous ensemble en vrac). Ne perdez pas de temps sur les bonus : ce sont des questions intéressantes, mais parfois plus difficiles.

Le barème est indicatif. Il n'est pas nécessaire de tout faire pour obtenir une bonne note. Comme le DM est assez long, la notation sera probablement non linéaire.

Exercice 1 : Logique propositionnelle (20 points)

1. Montrer que
$$(\varphi \Rightarrow \bot) \equiv (\neg\varphi)$$
Ne pas hésiter à commenter.

Solution: La majeure partie de cet exercice avait pour but d'écrire des tables de vérité.

$[\varphi]_\sigma$	$[\bot]_\sigma$	$\left[(\varphi \Rightarrow \bot)\right]_\sigma$	$\left[(\neg\varphi)\right]_\sigma$
ff	*ff*	*tt*	*tt*
tt	*ff*	*ff*	*ff*

Les colonnes de $\left[(\varphi \Rightarrow \bot)\right]_\sigma$ et $\left[(\neg\varphi)\right]_\sigma$ sont les mêmes. Par conséquent, $\left[(\varphi \Rightarrow \bot)\right]_\sigma \equiv \left[(\neg\varphi)\right]_\sigma$.
Que peut on dire de ça ? Dans certaines logiques, c'est ainsi qu'on définit la négation. Sinon, on peut réinterpréter à la façon du raisonnement par l'absurde : si φ implique une contradiction, c'est que φ est faux.

2. Prouver la loi de PIERCE :
$$\Big(\big((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi\big) \Rightarrow \varphi\Big)$$

Solution:

$[\varphi]_\sigma$	$[\psi]_\sigma$	$\left[(\varphi \Rightarrow \psi)\right]_\sigma$	$\left[\Big((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi\Big)\right]_\sigma$
ff	ff	tt	ff
ff	tt	tt	ff
tt	ff	ff	tt
tt	tt	tt	tt

$[\varphi]_\sigma$	$[\psi]_\sigma$	$\left[\bigg(\Big((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi\Big) \Rightarrow \varphi\bigg)\right]_\sigma$
ff	ff	tt
ff	tt	tt
tt	ff	tt
tt	tt	tt

La loi de PIERCE est donc une tautologie.

Une remarque intéressante est que la loi de PIERCE est équivalente au tiers exclu.

3. Prouver

$$\big(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)\big) \equiv \big((A \wedge B) \Rightarrow C\big)$$

Solution:

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	$[C]_\sigma$	$[(B \Rightarrow C)]_\sigma$	$\left[(A \Rightarrow (B \Rightarrow C))\right]_\sigma$
ff	ff	ff	tt	tt
ff	ff	tt	tt	tt
ff	tt	ff	ff	tt
ff	tt	tt	tt	tt
tt	ff	ff	tt	tt
tt	ff	tt	tt	tt
tt	tt	ff	ff	ff
tt	tt	tt	tt	tt

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	$[C]_\sigma$	$[(A \wedge B)]_\sigma$	$\left[((A \wedge B) \Rightarrow C)\right]_\sigma$
ff	ff	ff	ff	tt
ff	ff	tt	ff	tt
ff	tt	ff	ff	tt
ff	tt	tt	ff	tt
tt	ff	ff	ff	tt
tt	ff	tt	ff	tt
tt	tt	ff	tt	ff
tt	tt	tt	tt	tt

Encore une fois, égalité de colonne...

4. Prouver que $\varphi \equiv \psi$ si et seulement si $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ est une tautologie.

Solution: Cette question est plus délicate. Tout d'abord, il ne faut pas mettre $\varphi \equiv \psi$ dans une table de vérité puisque ce n'est pas une formule.

Comme la proposition à prouver peut sembler étrange, on va le faire par double implication.

($\Rightarrow$) On suppose que $\varphi \equiv \psi$. C'est à dire que pour tout environnement, φ et ψ ont la même évaluation. Il n'y a alors que deux environnements à considérer : soit les deux s'évaluent en faux, soit les deux s'évaluent en vrai.

$[\varphi]_\sigma$	$[\psi]_\sigma$	$\left[(\varphi \Leftrightarrow \psi)\right]_\sigma$
ff	ff	tt
tt	tt	tt

On voit bien alors que $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ est une tautologie.

($\Leftarrow$) On suppose que $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ est une tautologie.

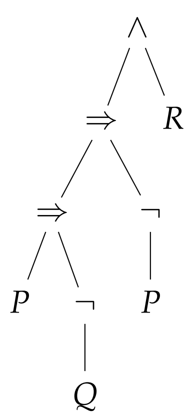
$[\varphi]_\sigma$	$[\psi]_\sigma$	$\left[(\varphi \Leftrightarrow \psi)\right]_\sigma$
ff	ff	tt
ff	tt	ff
tt	ff	ff
tt	tt	tt

Dans la table de vérité, on voit que les environnements qui permettent à $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ d'être une tautologie sont ceux où φ et ψ ont la même valeur de vérité. Par conséquent, $\varphi \equiv \psi$.

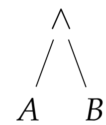
5. Soit φ la formule

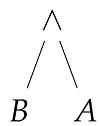
$$\Big(\big((P \Rightarrow (\neg Q)) \Rightarrow (\neg P)\big) \wedge R\Big)$$

(a) Écrire φ sous forme d'arbre



Solution: Attention à bien respecter l'ordre avec $\Rightarrow$.

Comme chacun sait $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$ alors on peut réécrire 

en 

, même si avec une approche aussi syntaxique que la notre, c'est pas très classe. Mais $(A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow A)$ n'ont rien à voir, donc il faut bien respecter l'ordre.

(b) Donner la table de vérité de φ

Solution:

$[P]_\sigma$	$[Q]_\sigma$	$[R]_\sigma$	$[(\neg Q)]_\sigma$	$\left[(P \Rightarrow (\neg Q))\right]_\sigma$	$[(\neg P)]_\sigma$
ff	ff	ff	tt	tt	tt
ff	ff	tt	tt	tt	tt
ff	tt	ff	ff	tt	tt
ff	tt	tt	ff	tt	tt
tt	ff	ff	tt	tt	ff
tt	ff	tt	tt	tt	ff
tt	tt	ff	ff	ff	ff
tt	tt	tt	ff	ff	ff

$[P]_\sigma$	$[Q]_\sigma$	$[R]_\sigma$	$\left[\left((P \Rightarrow (\neg Q)) \Rightarrow (\neg P)\right)\right]_\sigma$	$[\varphi]_\sigma$
ff	ff	ff	tt	ff
ff	ff	tt	tt	tt
ff	tt	ff	tt	ff
ff	tt	tt	tt	tt
tt	ff	ff	ff	ff
tt	ff	tt	ff	ff
tt	tt	ff	tt	ff
tt	tt	tt	tt	tt

(c) Cette formule est elle une tautologie ? Justifier.

Solution: Ce n'est pas une tautologie : certains environnements rendent φ faux. Par exemple

$$\begin{aligned} P &\mapsto \mathit{ff} \\ Q &\mapsto \mathit{ff} \\ R &\mapsto \mathit{ff} \end{aligned}$$

J'ai très rarement vu de contre-exemple, c'est pourtant la preuve la plus convaincante (et souvent la plus simple).

(d) Cette formule est elle une contradiction ? Justifier.

Solution: Ce n'est pas une contradiction : certains environnements rendent φ vrai. Par exemple

$$\begin{aligned} P &\mapsto \mathit{ff} \\ Q &\mapsto \mathit{ff} \\ R &\mapsto \mathit{tt} \end{aligned}$$

6. (a) Montrer les lois de BOOLE :

$$\begin{aligned} \big((A \vee B) \wedge C\big) &\equiv \big((A \wedge C) \vee (B \wedge C)\big) \\ \big((A \wedge B) \vee C\big) &\equiv \big((A \vee C) \wedge (B \vee C)\big) \end{aligned}$$

C'est la distributivité de $\vee$ par rapport à $\wedge$ et la distributivité de $\wedge$ par rapport à $\vee$.

Solution:

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	$[C]_\sigma$	$[(A \vee B)]_\sigma$	$\left[((A \vee B) \wedge C)\right]_\sigma$	$[(A \wedge C)]_\sigma$
ff	ff	ff	ff	ff	ff
ff	ff	tt	ff	ff	ff
ff	tt	ff	tt	ff	ff
ff	tt	tt	tt	tt	ff
tt	ff	ff	tt	ff	ff
tt	ff	tt	tt	tt	tt
tt	tt	ff	tt	ff	ff
tt	tt	tt	tt	tt	tt

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	$[C]_\sigma$	$[(B \wedge C)]_\sigma$	$\left[((A \wedge C) \vee (B \wedge C))\right]_\sigma$
ff	ff	ff	ff	ff
ff	ff	tt	ff	ff
ff	tt	ff	ff	ff
ff	tt	tt	tt	tt
tt	ff	ff	ff	ff
tt	ff	tt	ff	tt
tt	tt	ff	ff	ff
tt	tt	tt	tt	tt

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	$[C]_\sigma$	$[(A \wedge B)]_\sigma$	$\left[((A \wedge B) \vee C)\right]_\sigma$	$[(A \vee C)]_\sigma$
ff	ff	ff	ff	ff	ff
ff	ff	tt	ff	tt	tt
ff	tt	ff	ff	ff	ff
ff	tt	tt	ff	tt	tt
tt	ff	ff	ff	ff	tt
tt	ff	tt	ff	tt	tt
tt	tt	ff	tt	tt	tt
tt	tt	tt	tt	tt	tt

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	$[C]_\sigma$	$[(B \vee C)]_\sigma$	$[((A \vee C) \wedge (B \vee C))]_\sigma$
ff	ff	ff	ff	ff
ff	ff	tt	tt	tt
ff	tt	ff	tt	ff
ff	tt	tt	tt	tt
tt	ff	ff	ff	ff
tt	ff	tt	tt	tt
tt	tt	ff	tt	tt
tt	tt	tt	tt	tt

(b) Montrer que $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$ et $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$. C'est la commutativité de $\vee$ et $\wedge$

Solution:

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	$[(A \wedge B)]_\sigma$	$[(B \wedge A)]_\sigma$	$[(A \vee B)]_\sigma$	$[(B \vee A)]_\sigma$
ff	ff	ff	ff	ff	ff
ff	tt	ff	ff	tt	tt
tt	ff	ff	ff	tt	tt
tt	tt	tt	tt	tt	tt

(c) Montrer que $\big((A \wedge B) \wedge C\big) \equiv \big(A \wedge (B \wedge C)\big)$ et $\big((A \vee B) \vee C\big) \equiv \big(A \vee (B \vee C)\big)$. C'est l'associativité de $\vee$ et $\wedge$.

Solution:

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	$[C]_\sigma$	$[(A \wedge B)]_\sigma$	$\left[((A \wedge B) \wedge C)\right]_\sigma$	$[(B \wedge C)]_\sigma$
ff	ff	ff	ff	ff	ff
ff	ff	tt	ff	ff	ff
ff	tt	ff	ff	ff	ff
ff	tt	tt	ff	ff	tt
tt	ff	ff	ff	ff	ff
tt	ff	tt	ff	ff	ff
tt	tt	ff	tt	ff	ff
tt	tt	tt	tt	tt	tt

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	$[C]_\sigma$	$\left[(A \wedge (B \wedge C))\right]_\sigma$	$[(A \vee B)]_\sigma$	$\left[((A \vee B) \vee C)\right]_\sigma$
ff	ff	ff	ff	ff	ff
ff	ff	tt	ff	ff	tt
ff	tt	ff	ff	tt	tt
ff	tt	tt	ff	tt	tt
tt	ff	ff	ff	tt	tt
tt	ff	tt	ff	tt	tt
tt	tt	ff	ff	tt	tt
tt	tt	tt	tt	tt	tt

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	$[C]_\sigma$	$[(B \vee C)]_\sigma$	$\left[(A \vee (B \vee C))\right]_\sigma$
ff	ff	ff	ff	ff
ff	ff	tt	tt	tt
ff	tt	ff	tt	tt
ff	tt	tt	tt	tt
tt	ff	ff	ff	tt
tt	ff	tt	tt	tt
tt	tt	ff	tt	tt
tt	tt	tt	tt	tt

7. Quel(s) entier(s) de l'intervalle $[\![2,40]\!]$ vérifie l'implication :

$$\big(n \text{ est multiple de } 10 \;\Rightarrow (n+1) \text{ est premier}\big)$$

Solution: L'implication est un connecteur binaire et il y a donc 4 cas d'évaluation possibles. Parmi eux, 3 de ces cas rendent l'implication vraie et seulement un seul la rend fausse. On va donc s'intéresser aux entiers qui rendent l'implication fausse, les autres seront l'ensemble recherché.

On sait que $\big(\neg(A \Rightarrow B)\big) \equiv \big(A \wedge (\neg B)\big)$. Il faut donc trouver les nombres n de $[\![2,40]\!]$ qui sont multiples de 10 et pour lesquels $n+1$ est composé (non premier). Les multiples de 10 sont 10, 20, 30 et 40. 11, 31 et 41 sont premiers. Seul 21 est composé (3×7). On en déduit que seulement 20 rend l'implication fausse. Par conséquent, tous les nombres de $[\![2,40]\!] \setminus \{20\}$ rendent l'implication vraie.

NB : 41 n'appartient pas à $[\![2,40]\!]$. Ce n'est pas un problème. La variable du prédicat est n, c'est elle qui doit être dans l'intervalle entier, pas les valeurs calculées à partir de celle-ci.

Exercice 2 : Fonctions (15 points)

1. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} \setminus \{-3\} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{iz - i}{z+3} \end{aligned}$$

(a) Montrer que f est injective.

Solution: Soit $(a,b) \in \big(\mathbb{C} \setminus \{-3\}\big)^2$. On suppose $f(a) = f(b)$.

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\Leftrightarrow \frac{ia-i}{a+3} = \frac{ib-i}{b+3} \\ &\Leftrightarrow (ia-i)(b+3) = (ib-i)(a+3) \\ &\Leftrightarrow iab + 3ia - ib - 3i = iab + 3ib - ia - 3i \\ &\Leftrightarrow 3ia + ia = 3ib + ib \\ &\Leftrightarrow 4ia = 4ib \\ &\Leftrightarrow a = b \end{aligned}$$

On a donc $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ donc f est injective.

On pourra noter le soin inutile apporté au raisonnement par équivalence : c'est inutile ici, on ne veut qu'une implication. La réciproque ($a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$) est évidente et toujours vraie (principe de LEIBNIZ ou principe d'indiscernabilité des identiques, sans lequel on peut pas faire de math).

(b) Déterminer E tel que

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C} \setminus \{-3\} &\to E \\ z &\mapsto f(z) \end{aligned}$$

est bijective.

Solution: On se donne $y \in \mathbb{C}$. On cherche quand il existe un antécédent de y par f. Pour cela, on résout $f(x) = y$ en $x \in \mathbb{C} \setminus \{-3\}$

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow \frac{ix - i}{x + 3} = y \\ \text{car } x + 3 \text{ non nul} &\Leftrightarrow ix - i = y(x + 3) \qquad \Leftrightarrow ix - i = yx + 3y \\ &\Leftrightarrow x(i - y) = 3y + i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3y+i}{i-y} & y \neq i \\ 0 = 4i & y = i \end{cases} \end{aligned}$$

Le second cas est une contradiction. Par conséquent, il n'y a pas de solution quand $y = i$. Donc tous les éléments de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ ont un antécédent.

En posant $E = \mathbb{C} \setminus i$, g est surjective. Puisque g est une corestriction de f (c'est à dire f avec un ensemble d'arrivé restreint), g est également injective. g est donc bijective.

(c) Déterminer la bijection réciproque de g.

Solution: Comme g est bijective, on peut y aller allègrement! On prend donc $y \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ et on cherche $x \in \mathbb{C} \setminus \{-3\}$ tel que $g(x) = y$.

On a déjà fait le calcul : on trouve

$$x = \frac{3y+i}{i-y}$$

Ainsi la fonction

$$\begin{aligned} g^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{i\} &\to \mathbb{C} \setminus \{-3\} \\ y &\mapsto \frac{3y+i}{i-y} \end{aligned}$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose f strictement croissante. Montrer que f est injective.

Solution: Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On Suppose $f(a) = f(b)$. On a a fortiori $f(a) \geqslant f(b)$. Donc $a \geqslant b$. Symétriquement, on a $f(a) \leqslant f(b)$ donc $a \leqslant b$. On a donc $a = b$. Donc f est injective.

3. (5 points bonus)
   (a) Montrer qu'il existe une bijection entre $]0, 1[$ et $\mathbb{R}$.

Solution: Le plus simple pour montrer qu'il existe quelque chose, c'est d'en expliciter une. Ainsi, posons

$$\begin{aligned} f :]0,1[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

On remarque que cette fonction est bien définie sur son ensemble de départ. De plus, elle est évidemment $\mathcal{C}^1$ (continue, dérivable à dérivée continue).

On a $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$. Grâce au théorème des valeurs intermédiaires, la fonction est surjective (tout élément de $\mathbb{R}$ est atteint).

On doit encore prouver l'injectivité. Le plus simple est d'utiliser la stricte monotonie de f et d'appliquer la question 2. En effet, f est strictement décroissante. On laisse au lecteur le soin d'adapter la question 2 à toute fonction strictement monotone.

Pour prouver la stricte monotonie de f, on calcule la dérivée :

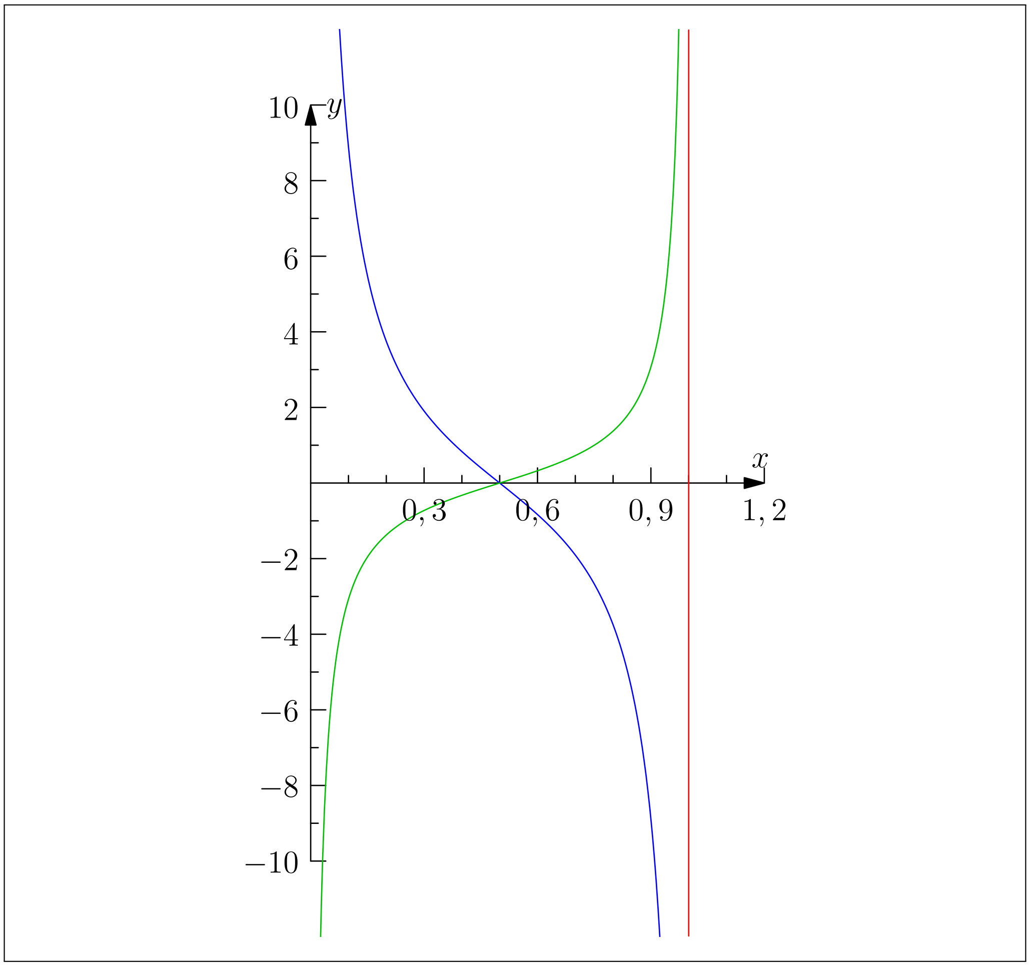
$$\begin{aligned} f' :]0,1[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

On a $\forall x \in]0,1[, f'(x) < 0$. f est donc strictement décroissante (attention, la réciproque n'est pas vrai, il existe des fonction strictement monotone et $\mathcal{C}^1$ dont la dérivée s'annule, par exemple $x \mapsto x^3$).

f est donc injective, donc bijective. Il existe donc bien une bijection entre $]0,1[$ et $\mathbb{R}$.

Le truc intéressant est de constater que ces deux ensembles ont donc la même taille.

La fonction $x \mapsto \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$ convient aussi.



(b) Existe-t-il une bijection entre $[0;1]$ et $]0;1[$? Justifier

Solution: J'ai lu d'intelligentes solutions. Cependant, elles peuvent sembler sortir du chapeau. Ma méthode sera une description plus pédestre de la même méthode.

Comme précédemment, on va exhiber une bijection. Cependant, il y a de bonnes raisons de croire qu'il n'existe pas de bijection continue. Une façon intuitive est de regarder la bijection précédente : on a été obligé de faire diverger f en 0 et 1. Ce qui ne convient pas du tout ici. Vous verrez sans doute par la suite que $[0,1]$ est un fermé non ouvert (car il existe des ensembles à la fois ouverts et fermés), $]0,1[$ est un ouvert non fermé et que l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue est un ouvert. Donc ça marche pas.

L'idée est de séparer $[0,1]$ en deux parties : on extrait une suite (u_n) qui va commencer par 0 et 1 puis va prendre des valeurs différentes deux à deux, et le reste.

On pose donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{aligned}(u_n) : \mathbb{N} &\to [0,1]\\ 0 &\mapsto 0\\ n &\mapsto \frac{1}{n} \text{ sinon}\end{aligned}$$

C'est donc la suite des éléments de la forme $\frac{1}{k}$ précédé de 0. On veut donc exclure les deux premiers termes de la suite. On peut donc définir une fonction

$$\begin{aligned}f : [0,1] &\to]0,1[\\ x &\mapsto \begin{cases} u_{n+2} & \text{si } x = u_n \\ x & \text{sinon}\end{cases}\end{aligned}$$

On remarque que cette fonction stabilise la suite : l'image de tout élément de la suite est un élément de la suite. Elle stabilise aussi le complémentaire. Il est évident que f est une bijection sur le complémentaire de la suite (tout les éléments qui ne sont pas de la forme $\frac{1}{k}$ ou 0). À l'intérieur de la suite, la fonction se contente de décaler de deux rangs. L'ensemble de départ est $\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$ et celui d'arrivée est $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$. f réalise bien une bijection entre ces deux parties. Il existe donc une bijection entre $[0,1]$ et $]0,1[$.

On remarque plus généralement qu'on peut exclure un nombre fini d'éléments de n'importe quel ensemble qui contient au moins un nombre dénombrable d'éléments (de façon à constituer une suite). En adaptant légèrement cette solution, on peut même exclure un nombre dénombrable de point (tant qu'il en reste au moins un nombre dénombrable). Cette amélioration est laissée au lecteur.

Exercice 3 : Relations (15 points)

1. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $x\mathscr{R}y$ si et seulement si $x^2 - y^2 = x - y$.
   (a) Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

   Solution: Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   - Réflexivité : On veut prouver que $x\mathscr{R}x$. On a $x^2 - x^2 = 0$ et $x - x = 0$. Donc $x^2 - x^2 = x - x$. Donc $\mathscr{R}$ est réflexive.
   - Symétrie : On suppose $x\mathscr{R}y$. On veut prouver $y\mathscr{R}x$. On a $x^2 - y^2 = x - y$. Donc $-(x^2 - y^2) = -(x - y)$, soit $y^2 - x^2 = y - x$. D'où $y\mathscr{R}x$.
   - Transitivité : On suppose $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$. On a donc $x^2 - y^2 = x - y$ et $y^2 - z^2 = y - z$. En sommant terme à terme, on trouve $x^2 - y^2 + y^2 - z^2 = x - y + y - z$ qui se simplifie en $x^2 - z^2 = x - z$. Donc $x\mathscr{R}z$.

   Donc $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer la classe d'équivalence de x.

   Solution: Soit $x \in \mathbb{R}$. On cherche l'ensemble des $y \in \mathbb{R}$ tel que $x\mathscr{R}y$. On suppose donc $x\mathscr{R}y$. On a

$$\begin{aligned} x\mathscr{R}y &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y \\ &\Leftrightarrow (x - y)(x + y) = x - y \\ &\Leftrightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0 \end{aligned}$$

   Il y a donc deux cas. $x - y = 0$ ou $x + y - 1 = 0$. Par conséquent $\mathrm{cl}\,(x) = \{x, 1 - x\}$. Il y a forcément au moins x puisqu'une relation d'équivalence est réflexive.

2. On définit sur $\mathbb{N}^2$ la relation $\sqsubseteq$ par

$$(x, y) \sqsubseteq (x', y') \Leftrightarrow \Big(x < x' \vee \big(x = x' \wedge y \leqslant y'\big)\Big)$$

   (a) Démontrer que $\sqsubseteq$ est une relation d'ordre.

   Solution: Soit $((a, b), (c, d), (e, f)) \in \left(\mathbb{N}^2\right)^3$.

- Réflexivité : On a $(a = a \wedge b \leqslant b)$ donc a fortiori $\big(a < a \vee (a = a \wedge b \leqslant b)\big)$. Donc $(a,b) \sqsubseteq (a,b)$.
- Antisymétrie : On suppose $(a,b) \sqsubseteq (c,d)$ et $(c,d) \sqsubseteq (a,b)$. C'est à dire $\big(a < c \vee (a = c \wedge b \leqslant d)\big)$ et $\big(c < a \vee (c = a \wedge d \leqslant b)\big)$. On déduit donc que $a = c$ et par conséquent $b \leqslant d$ et $d \leqslant b$ d'où $b = d$. D'où $(a,b) = (c,d)$.
- Transitivité : On suppose $(a,b) \sqsubseteq (c,d)$ et $(c,d) \sqsubseteq (e,f)$. C'est à dire $\big(a < c \vee (a = c \wedge b \leqslant d)\big)$ et $\Big(c < e \vee \big(c = e \wedge d \leqslant f\big)\Big)$. Il y a 4 cas :
  - $a < c$ et $c < e$ on a donc $a < e$ d'où $(a,b) \sqsubseteq (e,f)$;
  - $a < c$ et $\big(c = e \wedge d \leqslant f\big)$ on a donc $a < e$ d'où $(a,b) \sqsubseteq (e,f)$;
  - $(a = c \wedge b \leqslant d)$ et $c < e$ on a donc $a < e$ d'où $(a,b) \sqsubseteq (e,f)$;
  - $(a = c \wedge b \leqslant d)$ et $\big(c = e \wedge d \leqslant f\big)$ on a donc $a = e$ et $b \leqslant f$ d'où $(a,b) \sqsubseteq (e,f)$.

  On a donc $(a,b) \sqsubseteq (e,f)$ dans tous les cas.

$\sqsubseteq$ est donc une relation d'ordre.

(b) (5 points bonus) Montrer que cet ordre est bien fondé.

Solution: On va prouver qu'il n'existe pas de suite de $\mathbb{N}^2$ strictement décroissante infinie au sens de $\sqsubseteq$. Pour cela, on va prouver par récurrence forte sur $\mathbb{N}$ le prédicat P_n : « Il n'existe pas de suite infinie de $\mathbb{N}^2$ strictement décroissante pour $\sqsubseteq$ dont le premier terme est de la forme (n,k) avec $k \in \mathbb{N}$ ».

- Initialisation : Pour $n = 0$. On cherche donc à prouver qu'il n'existe pas de suite strictement décroissante commençant par $(0,k)$ où k est un naturel. Tous les éléments strictement inférieurs sont de la forme $(0,j)$ avec $j < k$. Il existe donc un nombre fini de ces éléments et par conséquent, il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie jusqu'au rang n. On veut la prouver au rang $n+1$. Soit $k \in \mathbb{N}$. On veut prouver qu'il n'existe pas de suite strictement décroissante commençant par $(n+1,k)$. Les éléments strictement plus petits que $(n+1,k)$ sont soit de la forme (a,b) avec $a < n+1$ ou $(n+1,b)$ avec $b < k$. Il n'existe qu'un nombre fini de cette

dernière catégorie, une fois arrivée à $(n+1,0)$, la seule solution est de passer à des éléments de la forme (a,b) avec $a < n+1$. On appelle (x,y) le premier élément qui n'est pas de la forme $(n+1,j)$. On utilise alors la proposition P_x pour prouver qu'il n'existe pas de suite strictement décroissante commençant par (x,y). Il n'existe donc pas de suite strictement décroissante commençant par $(n+1,k)$.

La propriété est donc vraie à tous les rangs. $\sqsubseteq$ est donc bien fondé.

(c) (5 points bonus) Est ce que cette relation est toujours une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}^2$? Est ce encore un ordre bien fondé ?

Solution: $\sqsubseteq$ est une relation d'ordre en utilisant la même preuve que précédemment. Attention : avec des preuves de ce genre, en utilisant un simple « de même » ou autre, si la première version contient une faute, elle risque de vous être comptée une seconde fois !

Par contre, cet ordre n'est plus bien fondé. En effet la suite $((0,-n))_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et infinie.

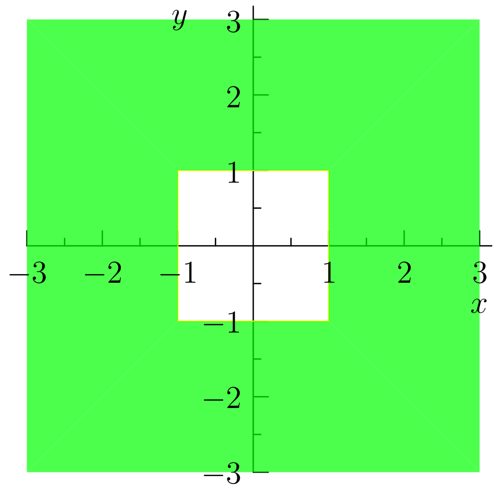
J'ai eu beaucoup de blabla compliqués et douteux : cet exemple simple est à la fois plus court et plus convainquant !

Exercice 4 : Théorie des ensembles (15points)

1. Dessiner les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$

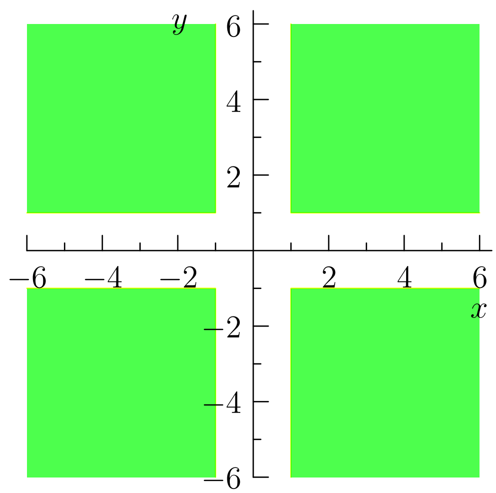
   (a) $\complement\left([-1,1]\times[-1,1]\right)$

Solution: On note que le carré (en jaune), ne fait pas parti de l'ensemble.



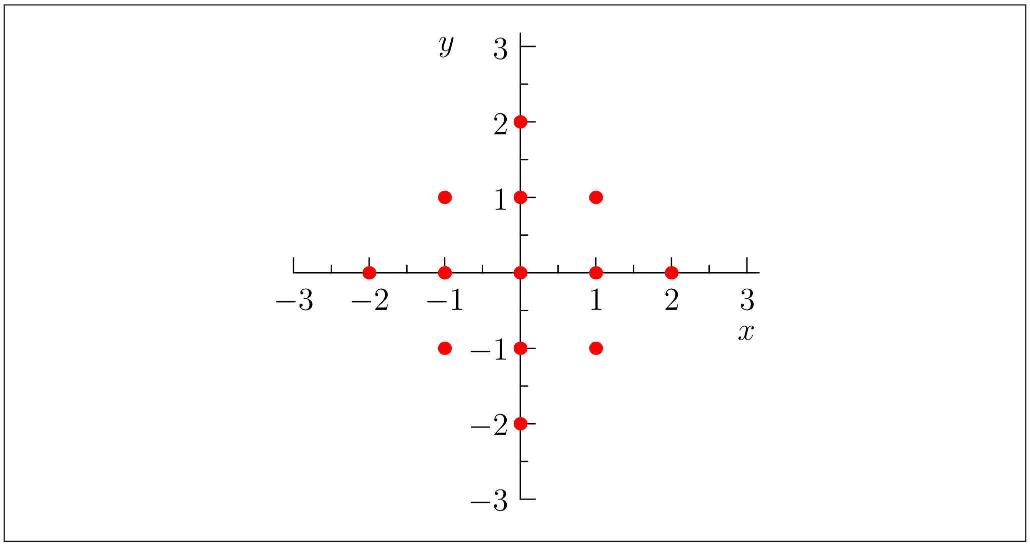
(b) $\left(\complement[-1,1]\right) \times \left(\complement[-1,1]\right)$

Solution: On note que les bordures (en jaune), ne fait pas parti de l'ensemble.



(c) $\left\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; a^2 + b^2 \leqslant 4\right\}$

Solution:



2. Décrire formellement chacune de ces trois parties de $\mathbb{R}^2$. La croix n'étant qu'un seul ensemble et ses branches sont infinies (ici coupées par le cadre de l'image).

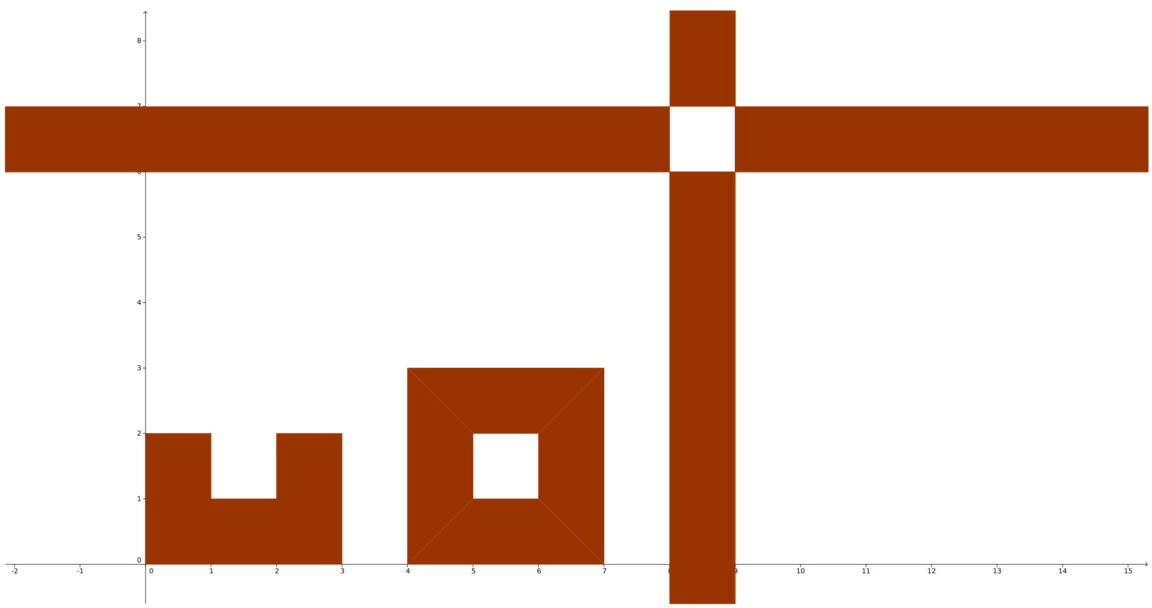


FIGURE 1 – Les parties

Solution:
- $([0,3] \times [0,2]) \setminus ([1,2] \times [1,2])$
- $([4,7] \times [0,3]) \setminus ([5,6] \times [1,2])$
- $([8,9] \times \mathbb{R}) \Delta (\mathbb{R} \times [6,7])$

3. Soit E un ensemble. On appelle fonction caractéristique de $A \subseteq E$ l'application :

$$\varphi_A : E \to \{0,1\}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque que toute fonction définie sur E est une fonction caractéristique d'une partie de E si et seulement si f est à valeur dans $\{0,1\}$. Si f est une fonction caractéristique, elle décrit l'ensemble $\{x \in E \mid f(x) = 1\}$.

Soit A et B deux parties de E. Trouver lesquelles des fonctions ci-dessous sont des fonctions caractéristiques et dans ce cas, les ensembles caractérisés.

(a) $1 - \varphi_A$

Solution: Comme φ_A est une fonction à valeur dans $\{0,1\}$, $1 - \varphi_A$ aussi. Donc $1 - \varphi_A$ est une fonction caractéristique d'une partie de E qu'on va appeler B. On a $\varphi_B = 1 - \varphi_A$.

Déterminons B. Soit $x \in E$.
- Si $x \in A$, $\varphi_A(x) = 1$, $\varphi_B(x) = 0$, $x \notin B$
- Si $x \notin A$, $\varphi_A(x) = 0$, $\varphi_B(x) = 1$, $x \in B$

Donc $B = \complement_E A$.

(b) $\min(\varphi_A, \varphi_B)$

Solution: Comme φ_B et φ_B sont des fonctions à valeur dans $\{0,1\}$, $\min(\varphi_A, \varphi_B)$ aussi. Donc c'est une fonction caractéristique d'une partie de E qu'on va appeler C. On a $\varphi_C = \min(\varphi_A, \varphi_B)$.

Déterminons C. Soit $x \in E$.
- Si $x \in A$ et $x \in B$, $\varphi_A(x) = 1$, $\varphi_B(x) = 1$, donc $\varphi_C(x) = 1$, $x \in C$
- Si $x \notin A$ et $x \in B$, $\varphi_A(x) = 0$, $\varphi_B(x) = 1$, donc $\varphi_C(x) = 0$, $x \notin C$

— Si $x \in A$ et $x \notin B$, $\varphi_A(x) = 1$, $\varphi_B(x) = 0$, donc $\varphi_C(x) = 0$, $x \notin C$
— Si $x \notin A$ et $x \notin B$, $\varphi_A(x) = 0$, $\varphi_B(x) = 0$, donc $\varphi_C(x) = 0$, $x \notin C$

Donc $C = A \cap B$.

(c) $\max(\varphi_A, \varphi_B)$

Solution: Comme φ_B et φ_B sont des fonctions à valeur dans $\{0, 1\}$, $\max(\varphi_A, \varphi_B)$ aussi. Donc c'est une fonction caractéristique d'une partie de E qu'on va appeler C. On a $\varphi_C = \max(\varphi_A, \varphi_B)$.

Déterminons C. Soit $x \in E$.

— Si $x \in A$ et $x \in B$, $\varphi_A(x) = 1$, $\varphi_B(x) = 1$, donc $\varphi_C(x) = 1$, $x \in C$
— Si $x \notin A$ et $x \in B$, $\varphi_A(x) = 0$, $\varphi_B(x) = 1$, donc $\varphi_C(x) = 1$, $x \in C$
— Si $x \in A$ et $x \notin B$, $\varphi_A(x) = 1$, $\varphi_B(x) = 0$, donc $\varphi_C(x) = 1$, $x \in C$
— Si $x \notin A$ et $x \notin B$, $\varphi_A(x) = 0$, $\varphi_B(x) = 0$, donc $\varphi_C(x) = 0$, $x \notin C$

Donc $C = A \cup B$.

(d) $\varphi_A \varphi_B$

Solution: Comme φ_B et φ_B sont des fonctions à valeur dans $\{0, 1\}$, $\varphi_A \varphi_A$ aussi. Donc c'est une fonction caractéristique d'une partie de E qu'on va appeler C. On a $\varphi_C = \varphi_A \varphi_B$.

Déterminons C. Soit $x \in E$.

— Si $x \in A$ et $x \in B$, $\varphi_A(x) = 1$, $\varphi_B(x) = 1$, donc $\varphi_C(x) = 1$, $x \in C$
— Si $x \notin A$ et $x \in B$, $\varphi_A(x) = 0$, $\varphi_B(x) = 1$, donc $\varphi_C(x) = 0$, $x \notin C$
— Si $x \in A$ et $x \notin B$, $\varphi_A(x) = 1$, $\varphi_B(x) = 0$, donc $\varphi_C(x) = 0$, $x \notin C$
— Si $x \notin A$ et $x \notin B$, $\varphi_A(x) = 0$, $\varphi_B(x) = 0$, donc $\varphi_C(x) = 0$, $x \notin C$

Donc $C = A \cap B$.

En effet, si x et y appartiennent à $\{0,1\}$, $xy = \min(x,y)$

(e) $\varphi_A + \varphi_B$

Solution: Ce n'est une fonction caractéristique en général. En effet, si $A = B = E$ et E non vide, il existe $x \in E$. Donc on a $\varphi_A(x) + \varphi_B(x) = 2$.
Allons plus loin que l'exo : sous quelle condition, cette fonction est caractéristique ? Il faut que jamais on ne puisse faire 1+1, donc il faut que A et B soient disjoint. Dans ce cas, cette fonction représente l'union.

(f) $\varphi_A - \varphi_B$

Solution: Ce n'est une fonction caractéristique en général. En effet, si $A = \emptyset$, $B = E$ et E non vide, il existe $x \in E$. Donc on a $\varphi_A(x) - \varphi_B(x) = -1$.
Allons plus loin que l'exo : sous quelle condition, cette fonction est caractéristique ? Il faut que jamais on ne puisse faire 0-1, donc il faut que B soit inclus dans A. Dans ce cas, cette fonction représente $A \setminus B$.

(g) (2 points bonus) $\varphi_A + \varphi_B - \varphi_A\varphi_B$

Solution: Il n'est pas évident de voir les valeurs prises par cette fonction. Du coup, on va la faire de façon bête et méchante. Soit $x \in E$.
- $x \in A$ et $x \in B$: $\varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_A(x)\varphi_B(x) = 1$
- $x \notin A$ et $x \in B$: $\varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_A(x)\varphi_B(x) = 1$
- $x \in A$ et $x \notin B$: $\varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_A(x)\varphi_B(x) = 1$
- $x \notin A$ et $x \notin B$: $\varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_A(x)\varphi_B(x) = 0$

Dans tous les cas, l'image est bien dans $\{0,1\}$. C'est donc une fonction caractéristique d'un ensemble qu'on appellera C. De plus ont remarque que $x \notin C$ si et seulement si $x \notin A$ et $x \notin B$. Donc $C = A \cup B$.

(h) (2 points bonus) $(\varphi_A - \varphi_B)^2$

Solution: Même méthode.Soit $x \in E$.
- $x \in A$ et $x \in B$: $(\varphi_A(x) - \varphi_B(x))^2 = 0$

— $x \in A$ et $x \notin B$: $(\varphi_A(x) - \varphi_B(x))^2 = 1$
— $x \notin A$ et $x \in B$: $(\varphi_A(x) - \varphi_B(x))^2 = 1$
— $x \notin A$ et $x \notin B$: $(\varphi_A(x) - \varphi_B(x))^2 = 0$

Dans tous les cas, l'image est bien dans $\{0,1\}$. C'est donc une fonction caractéristique d'un ensemble qu'on appellera C. De plus ont remarque que $x \notin C$ si et seulement si $x \notin A$ et $x \in B$ ou $x \in A$ et $x \notin B$. Donc $C = A\Delta B$.

4. (5 points bonus) Exprimer la proposition $\exists! x \in E : P(x)$ uniquement avec les quantificateurs $\exists$ et $\forall$.

Solution: Il faut dire 2 choses : il existe x tel que $P(x)$ et il n'y a qu'un seul x tel que $P(x)$. On peut le faire séparément.

— Existence : $\exists x \in E : P(x)$, sans surprise
— Unicité : $\forall (x,y) \in E^2, \Big(\big(P(x) \wedge P(y)\big) \Rightarrow x = y\Big)$.

Attention ! L'unicité ne dit pas que ça existe : si de tels x et y existent, alors ils sont égaux. Donc il y a bien unicité. Mais si P n'est jamais vérifié (si c'est une contradiction), alors la formule est tout de même vraie. Il faut donc bien l'existence en plus. La formule est donc

$$\Big(\forall (x,y) \in E^2, \Big(\big(P(x) \wedge P(y)\big) \Rightarrow x = y\Big)\Big) \wedge \big(\exists x \in E : P(x)\big)$$

Peut on faire en une fois ? Oui !

$$\exists x \in E : (P(x) \wedge \forall y \in E, P(y) \Rightarrow x = y)$$

Traduction : il existe un x tel que $P(x)$. Et tous les autres qui vérifient P sont égaux à x (donc x est tout seul).

Allons un peu plus loin : quelle est la négation de cette monstruosité ? Bien que la seconde formule soit plus concise, on va préférer la première qui est plus claire.

$$\Big(\exists (x,y) \in E^2, \Big(\big(P(x) \wedge P(y)\big) \wedge x \neq y\Big)\Big) \vee \big(\forall x \in E : \neg P(x)\big)$$

Traduction : soit il existe x et y différents qui vérifient tout deux P (négation de l'unicité), soit P n'est jamais vérifié (négation de l'existence).

Exercice 5 : Récurrence (15 points)

1. Prouver que $\forall n \geqslant 4, n < 2^n < n!$. Où $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ (NB : $0! = 1$). On pourra utiliser sans justifier que $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$.

Solution: On appelle P_n la proposition « $n < 2^n < n!$ ». On prouve P_n par récurrence sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3\}$.

— Initialisation : Pour $n = 4$. On a $4 < 16 = 2^4$ et $2^4 = 16 < 24 = 4!$ Donc P_4 est vrai.

— Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 4$. On suppose P_n vrai. Prouvons P_{n+1}. D'une part

$$\begin{aligned} n < 2^n < n! &\Leftrightarrow 2n < 2 \cdot 2^n < 2n! \\ &\Leftrightarrow n + n < 2^{n+1} < \frac{2}{n+1}(n+1)! \\ &\Rightarrow n + 1 < 2^{n+1} < (n+1)! \end{aligned}$$

Puisque $n \geqslant 1$ et $0 < \frac{2}{n+1} < 1$.

Par conséquent, $\forall n \geqslant 4, P_n$.

2. Prouver que pour tout entier naturel n

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, (1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

Solution: On appelle P_n la proposition « $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, (1+x)^n \geqslant 1 + nx$ ». On prouve P_n par récurrence sur $\mathbb{N}$.

— Initialisation : Pour $n = 0$. On a $(1+x)^n = 1$ et $1 + nx = 1$. D'où P_0.

— Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose P_n vrai. On cherche à prouver P_{n+1}. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

$$\begin{aligned} (1+x)^n \geqslant 1 + nx &\Leftrightarrow (1+x)^n(1+x) \geqslant (1+nx)(1+x) \\ &\Leftrightarrow (1+x)^{n+1} \geqslant 1 + nx + x + nx^2 \\ &\Leftrightarrow (1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &\Rightarrow (1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)x \end{aligned}$$

Puisque nx^2 est positif.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$.

3. (5 points bonus) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6.

Solution: On appelle P_n la proposition « $n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6 ». On prouve P_n par récurrence sur $\mathbb{N}^*$.

— Initialisation : Pour $n = 1$. On a $1(2\times 1+1)(7\times 1+1) = 1\times 3\times 8 = 24 = 6\times 4$.

— Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose P_n vrai. On prouve P_{n+1}.

$$n(2n+1)(7n+1) = 14n^3 + (7+2)n^2 + n = 14n^3 + 9n^2 + n$$

$$\begin{aligned}
&(n+1)(2(n+1)+1)(7(n+1)+1) \\
&= (n+1)(2n+3)(7n+8) \\
&= 14n^3 + 16n^2 + 21n^2 + 24n + 14n^2 + 16n + 21n + 24 \\
&= 14n^3 + n^2(16+21+14) + n(24+16+21) + 24 \\
&= 14n^3 + 51n^2 + 61n + 24 \\
&= 14n^3 + 9n^2 + n + 42n^2 + 60n + 24 \\
&= 14n^3 + 9n^2 + n + 6(7n^2 + 10n + 4)
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, c'est bien un multiple de 6.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n$.