

# TD3 : Fonctions

**Exercice 1:**

(a) Les fonctions suivantes sont elles injectives, surjectives, bijectives ?

i.

$$f_1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$n \mapsto 2n$$

ii.

$$f_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$n \mapsto -n$$

iii.

$$f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2$$

iv.

$$f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto x^2$$

v.

$$f_5 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \mapsto x^2$$

(b) Les fonctions suivantes sont elles injectives, surjectives, bijectives ?

i.

$$f_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto n + 1$$

ii.

$$f_1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$n \mapsto n + 1$$

iii.

$$f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$$

**Exercice 2:**

Soit  $f$  et  $g$  des applications de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  définies par

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto 2n$$

$$g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer si  $f$ ,  $g$ ,  $f \circ g$  et  $g \circ f$  sont injectives, surjectives ou bijectives.

**Exercice 3:**

Démontrer que la fonction  $f$  définie par

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$$

$$x \mapsto \frac{e^x + 2}{e^{-x}}$$

est bijective. Calculer sa bijection réciproque. On pourra utiliser le changement de variable  $X = e^x$ .

**Exercice 4:**

(a) Soit  $f$

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathfrak{P}$$

$$n \mapsto 2n$$

où  $\mathfrak{P}$  est l'ensemble des entiers naturels pairs. Soit  $g$

$$g : \mathbb{Z}^{-*} \rightarrow \mathfrak{I}$$

$$n \mapsto -2n + 3$$

où  $\mathfrak{I}$  est l'ensemble des entiers naturels impairs. Prouver que  $f$  et  $g$  sont des bijections.

(b) On pose  $h$

$$h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto \begin{cases} f(n) & \text{si } n \geq 0 \\ g(n) & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que  $h$  est une bijection.

**Exercice 5:**

Soit

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \mapsto e^{it}$$

Trouver des sous ensembles de  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  tel que  $f$  est une bijection.

**Exercice 6:**

Soit

$$f : [1, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$$

$$x \mapsto x^2 - 1$$

Déterminer si  $f$  est injective, surjective, bijective...

**Exercice 7: Des curiosités plus difficiles**

(a) Trouver une bijection entre  $\mathbb{N}^2$  et  $\mathbb{N}$ .

(b) Trouver une bijection entre  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  et  $\mathbb{R}$ .