

TD3 : Fonctions

Exercice 1:

(a) Les fonctions suivantes sont elles injectives, surjectives, bijectives ?

i.

$$f_1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$n \mapsto 2n$$

Solution:

- Injectivité : Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. On suppose $f_1(x) = f_1(y)$. On a donc $2x = 2y$. Donc $x = y$. Donc f_1 est injective.
- Surjectivité : On constate que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f_1(n)$ est pair. Donc l'équation $f_1(n) = 1$ n'a pas de solution. Donc f_1 n'est pas surjective.
- Bijectivité : Comme f_1 n'est pas surjective, elle n'est pas bijective.

ii.

$$f_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$n \mapsto -n$$

Solution:

- Injectivité : Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. On suppose $f_2(x) = f_2(y)$. On a donc $-x = -y$. Donc $x = y$. Donc f_2 est injective.
- Surjectivité : Soit $n \in \mathbb{Z}$. On cherche à résoudre $f_2(m) = n$ en m . C'est à dire $-m = n$. Donc $m = -n$. La solution existe. Donc la fonction est surjective.
- Bijectivité : f_2 est surjective et injective, donc bijective. D'autre part, on aurait pu se contenter de remarquer $f_2(m) = n$ n'a qu'une solution en m .

iii.

$$f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2$$

Solution:

- Injectivité : $f_3(-1) = 1 = f_3(1)$ donc f_3 n'est pas injective.
- Surjectivité : L'équation $f_3(x) = -1$ n'a pas de solution. Donc f_3 n'est pas surjective.
- Bijectivité : f_3 n'est ni injective, ni surjective, donc sûrement pas bijective.

iv.

$$f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto x^2$$

Solution:

- Injectivité : cf. supra.
- Surjectivité : Tous les éléments de \mathbb{R}^+ sont atteints. Plus formellement, soit $y \in \mathbb{R}^+$. On cherche la solution en x de $f_4(x) = y$. Une solution (non unique) est $x = \sqrt{y}$ (qui existe forcément). Donc f_4 est surjective.
- Bijektivité : La fonction n'est pas injective donc pas bijective.

v.

$$f_5 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \mapsto x^2$$

Solution:

- Injectivité : Même chose que précédemment.
- Surjectivité : Soit $y \in \mathbb{C}$. y peut s'écrire sous sa forme exponentielle : $y = \rho e^{i\theta}$. On pose $x = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}$. On a $f_5(x) = y$. Donc pour tout $y \in \mathbb{C}$, l'équation $f_5(x) = y$ a une solution en x , donc f_5 est surjective.
- Bijektivité : La fonction n'est pas injective donc pas bijective.

(b) Les fonctions suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

i.

$$f_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto n + 1$$

Solution:

- Injectivité : Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^2$. On suppose $f_1(x) = f_1(y)$. On a donc $x + 1 = y + 1$. Donc $x = y$. Donc f_1 est injective.
- Surjectivité : $f_1(x) = 0$ n'a pas de solution, donc f_1 n'est pas surjective.
- Bijektivité : Comme f_1 n'est pas surjective, elle n'est pas bijective.

ii.

$$f_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$n \mapsto n + 1$$

Solution:

- Injectivité : Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. On suppose $f_2(x) = f_2(y)$. On a donc $x + 1 = y + 1$. Donc $x = y$. Donc f_2 est injective.
- Surjectivité : Soit $y \in \mathbb{Z}$. On cherche une solution à $f_2(x) = y$. Une solution est $x = y - 1$. Donc f_2 est surjective.
- Bijektivité : Comme f_2 est injective et surjective, f_2 est bijective.

iii.

$$f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$$

Solution:

— Injectivité : Soit $((a, b), (c, d)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. On suppose $f_3((a, b)) = f_3((c, d))$. Autrement dit $(a + b, a - b) = (c + d, c - d)$, donc $a + b = c + d$ et $a - b = c - d$. On résout le système

$$\begin{cases} a + b = c + d \\ a - b = c - d \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} a + b = c + d \\ 2a = 2c \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} b = d \\ a = c \end{cases}$$

Donc $(a, b) = (c, d)$, donc f_3 est injective.

— Surjectivité : Soit $(c, d) \in \mathbb{R}^2$. On cherche à résoudre $f_3((a, b)) = (c, d)$ en (a, b) .

$$\begin{cases} a + b = c \\ a - b = d \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} a + b = c \\ 2a = c + d \end{cases}$$

par conséquent

$$\begin{cases} b = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}d \\ a = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d \end{cases}$$

Donc il existe une solution, donc f_3 est surjective

— Bijektivité : f_3 est injective et surjective, donc bijective.

Exercice 2:

Soit f et g des applications de \mathbb{N} dans \mathbb{N} définies par

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$
$$n \mapsto 2n$$

$$g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer si f , g , $f \circ g$ et $g \circ f$ sont injectives, surjectives ou bijectives.

Solution:

- f est évidemment injective. f n'atteint jamais 1, donc f n'est pas bijective.
- g n'est pas injective car $g(1) = 0 = g(3)$. g est surjective car tout $y \in \mathbb{N}$ est atteint, en effet $g(2y) = y$. g n'est pas bijective.
- Soit $x \in \mathbb{N}$. $g \circ f(x) = g(2x)$. Or $2x$ est toujours pair, donc $g(2x) = x$. Donc $g \circ f = Id$. Donc $g \circ f$ est bijective.
- On a $f \circ g(0) = 0 = f \circ g(1)$ donc $f \circ g$ n'est pas injective. On a également $f \circ g(x) = 2g(x)$. Donc $f \circ g(x)$ est toujours pair, donc $f \circ g$ n'est pas surjective. Donc $f \circ g$ n'est pas bijective.

Exercice 3:

Démontrer que la fonction f définie par

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$$

$$x \mapsto \frac{e^x + 2}{e^{-x}}$$

est bijective. Calculer sa bijection réciproque. On pourra utiliser le changement de variable $X = e^x$.

Solution: Soit $y \in \mathbb{R}^{+*}$. On veut résoudre $f(x) = y$ en x . On veut donc résoudre $\frac{e^x + 2}{e^{-x}} = y$. En utilisant le changement de variable suggéré : $\frac{X+2}{\frac{1}{X}} = y$.

$$\frac{X+2}{\frac{1}{X}} = y \Leftrightarrow X(X+2) = y$$

$$\Leftrightarrow X^2 + 2X = y$$

$$\Leftrightarrow X^2 + 2X - y = 0$$

$\Delta = 4 - 4 \cdot (-y) = 4(1 + y)$. Les racines sont donc

$$X = -1 \pm \sqrt{1 + y}$$

Mais $X = e^x$. Donc $X > 0$. Donc $e^x = X = -1 + \sqrt{1 + y}$. On en déduit $x = \ln(-1 + \sqrt{1 + y})$.

Il existe donc au plus une solution. Il faut encore vérifier que $\ln(-1 + \sqrt{1 + y})$ est bien défini. On a $y > 0$, donc $\sqrt{1 + y} > 1$, donc $-1 + \sqrt{1 + y} > 0$, donc la solution est toujours bien définie. Donc la fonction est bijective, de réciproque :

$$f^{-1} : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y \mapsto \ln(-1 + \sqrt{1 + y})$$

Exercice 4:

(a) Soit f

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathfrak{P} \\ n \mapsto 2n$$

où \mathfrak{P} est l'ensemble des entiers naturels pairs. Soit g

$$g : \mathbb{Z}^{-*} \rightarrow \mathfrak{I} \\ n \mapsto -2n + 3$$

où \mathfrak{I} est l'ensemble des entiers naturels impairs. Prouver que f et g sont des bijections.

Solution:

- Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^2$. On suppose $f(x) = f(y)$ donc $2x = 2y$ donc $x = y$, donc f est injective. D'autre part pour tout nombre pair n , il existe une solution en m à $f(m) = n : \frac{n}{2} = m$. Donc f est surjective, donc bijective.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^{-*2}$. On suppose $g(x) = g(y)$ donc $-2x + 3 = -2y + 3$ donc $x = y$, donc g est injective.
Soit $n = 2k + 1$ un nombre impair. On cherche à résoudre $g(x) = n$ en x .
 $-2n + 3 = 2k + 1$, $-2n + 2 = 2k$, donc $-n + 1 = k$ donc $n - 1 = -k$, puis $n = 1 - k$. Donc g est surjective donc bijective.

(b) On pose h

$$h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto \begin{cases} f(n) & \text{si } n \geq 0 \\ g(n) & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que h est une bijection.

Solution:

- Injectivité : Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. On suppose $h(x) = h(y)$. On distingue 3 cas :
 - x et y sont positifs. On a donc $f(x) = h(x) = h(y) = f(y)$. Donc $x = y$ par injectivité de f .
 - x et y sont strictement négatifs. On a donc $g(x) = h(x) = h(y) = g(y)$. Donc $x = y$ par injectivité de g .
 - x et y sont de signes différents. Donc $h(x)$ est pair et $h(y)$ est impair ou inversement. Donc on ne peut pas avoir $h(x) = h(y)$. Ce cas est donc impossible.Dans tous ces cas, h est injective.
- Surjectivité : Soit $y \in \mathbb{N}$. On distingue 2 cas :
 - y est pair : il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que $f(x) = y$, par surjectivité de f . Donc $h(x) = y$ a une solution.
 - y est impair : il existe $x \in \mathbb{Z}^{-*}$ tel que $g(x) = y$, par surjectivité de g . Donc $h(x) = y$ a une solution.Donc h est surjectif.
- Donc h est bijective.

Exercice 5:

Soit

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \mapsto e^{it}$$

Trouver des sous ensembles de \mathbb{R} et \mathbb{C} tel que f est une bijection.**Solution:** La fonction g

$$g : [0; 2\pi[\rightarrow \mathbb{U}$$

$$t \mapsto e^{it}$$

est bijective où \mathbb{U} est le cercle unité. g est injective :

$$g(x) = g(y) \Leftrightarrow e^{ix} = e^{iy}$$

$$\Leftrightarrow x = y + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = y \text{ car } t, t' \in [0, 2\pi[\text{ et donc } k = 0$$

 g est surjective car tout nombre complexe de \mathbb{U} s'écrit sous la forme polaire $e^{i\theta}$, et l'on peut choisir $\theta \in [0, 2\pi[$.**Exercice 6:**

Soit

$$f : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$$

$$x \mapsto x^2 - 1$$

Déterminer si f est injective, surjective, bijective...**Solution:**

- Soit $(x, y) \in [1, +\infty[^2$. On suppose $f(x) = f(y)$. Donc $x^2 - 1 = y^2 - 1$ so $x^2 = y^2$ et $x = \pm y$. Mais $x, y > 1$. Donc $x = y$. Donc f est injective.
- Soit $y \in [0, +\infty[$. On cherche à résoudre $f(x) = y$ en x dans $[1, +\infty[$. On a $x^2 - 1 = y$, $x^2 = y + 1$ donc $x = \pm\sqrt{y+1}$. Mais $x > 0$. Donc $x = \sqrt{y+1}$. Donc f est surjective.
- Donc f est injective et surjective donc bijective.

Exercice 7: Des curiosités plus difficiles(a) Trouver une bijection entre \mathbb{N}^2 et \mathbb{N} .**Solution:**

$$f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(m, n) \mapsto 2^m(2n + 1) - 1$$

fait l'affaire. En effet, on peut montrer que

$$g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^* \\ (m, n) \mapsto 2^m(2n + 1)$$

est une bijection.

- Soit $((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$. On suppose $g((a, b)) = g((c, d))$. On a donc $2^a(2b + 1) = 2^c(2d + 1)$. 2^a et 2^c sont pairs et $2b + 1$ et $2d + 1$ sont impairs. On a donc $2^a = 2^c$ et $2b + 1 = 2d + 1$. Donc $(a, b) = (c, d)$. Donc g est injective.
- Soit $y \in \mathbb{N}$. Soit 2^k la plus grande puissance de 2 qui divise y . Il existe donc l tel que $y = 2^k l$ avec l impair. En effet, si l est pair, on pourrait diviser y par 2^{k+1} , ce qui contredit le choix de k . Puisque l est impair, il existe n tel que $l = 2n + 1$. Donc $x = (k, n)$ est une solution de $g(x) = y$. On en déduit que g est surjective.
- g est donc bijective.

On en déduit facilement que f est bijective également.

(b) Trouver une bijection entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et \mathbb{R} .

Solution: Plein d'étapes!

- Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est en bijection avec l'ensemble des fonctions caractéristiques de \mathbb{N}
- Montrer que ces fonctions sont en bijection avec les suites infinies à valeur dans $\{0, 1\}$.
- Montrer que ces suites sont en bijection avec les décompositions binaires des nombres de $[0, 1]$. Pour ce faire, construire tout d'abord une surjection, déterminer les éléments atteints plusieurs fois (exactement 2 en fait). Faire une suite en listant les antécédents de ces valeurs et sauter un indice sur deux.
- Construire une bijection entre $[0, 1]$ et $]0, 1[$. Construire une bijection entre $]0, 1[$ et \mathbb{R} .
- Pfiou fini!