Calcul Propositionnel

Marc CHEVALIER
DI ENS

18 septembre 2017

1 Syntaxe

Définition 1 – Alphabet

Un symbole est l'une de ces quatre entités :
- une variable propositionnelle (ou proposition atomique, ou atome) : A, B, C, $A_0, \ldots, A_n$;
- une constante : $\top$, $\bot$;
- un connecteur logique : $\vee$, $\wedge$, $\neg$;
- une paire de séparateurs : (,).

Définition 2 – Formules

L'ensemble des formule est définie par induction par :
- les variables et constantes propositionnelles sont des formules ;
- si φ_1 et φ_2 sont des formules :
  - $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ est une formule ;
  - $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ est une formule ;
  - $(\neg\varphi_1)$ est une formule.

Définition 3 – Taille d'une formule

Étant donné une formule φ, on définit sa taille $|\varphi|$ par :
- 1 si φ est une variable ou constante propositionnelle ;
- $1 + |\varphi_1|$ si $\varphi = (\neg\varphi_1)$;
- $1 + \max(|\varphi_1|, |\varphi_2|)$ si $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$ ou $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$;

où φ_1 et φ_2 sont des formules du calcul propositionnel.

Définition 4

On définit l'ensemble des variables par induction sur les formules de la manière suivante :

— $\mathrm{Var}\,(A) = \{A\}$ si A est une variable propositionnelle ;
— $\mathrm{Var}\,(\top) = \emptyset$;
— $\mathrm{Var}\,(\bot) = \emptyset$;
— $\mathrm{Var}\,((\neg\varphi)) = \mathrm{Var}\,(\varphi)$ si φ est une formule du calcul propositionnel ;
— $\mathrm{Var}\,((\varphi_1 \wedge \varphi_2)) = \mathrm{Var}\,(\varphi_1) \cup \mathrm{Var}\,(\varphi_2)$ si φ_1 et φ_2 sont deux formules du calcul propositionnel ;
— $\mathrm{Var}\,((\varphi_1 \vee \varphi_2)) = \mathrm{Var}\,(\varphi_1) \cup \mathrm{Var}\,(\varphi_2)$ si φ_1 et φ_2 sont deux formules du calcul propositionnel.

2 Sémantique

Définition 5 – Environnement

Soit V un ensemble de variables propositionnelles. Un environnement sur V est une fonction de $V \to \mathcal{B}$.

Définition 6 – Évaluation

Soient φ une formule et V un sur-ensemble fini de $\mathrm{Var}\,(\varphi)$. Notons $V := \{A_1, \ldots, A_n\}$. Soit σ un environnement sur V.
Nous définissons l'évaluation $[\varphi]_\sigma$ de φ sur l'environnement σ par induction de la manière suivante :

— $[\bot]_\sigma = \mathit{ff}$;
— $[\top]_\sigma = \mathit{tt}$;
— $[A_i]_\sigma = \sigma(A_i)$;
— $[(\neg\varphi)]_\sigma = \begin{cases} \mathit{tt} & \text{si } [\varphi]_\sigma = \mathit{ff}, \\ \mathit{ff} & \text{sinon} ; \end{cases}$
— $[(\varphi_1 \vee \varphi_2)]_\sigma = \begin{cases} \mathit{tt} & \text{si } [\varphi_1]_\sigma = \mathit{tt} \text{ ou si } [\varphi_2]_\sigma = \mathit{tt}, \\ \mathit{ff} & \text{sinon} ; \end{cases}$
— $[(\varphi_1 \wedge \varphi_2)]_\sigma = \begin{cases} \mathit{tt} & \text{si } [\varphi_1]_\sigma = \mathit{tt} \text{ et si } [\varphi_2]_\sigma = \mathit{tt}, \\ \mathit{ff} & \text{sinon.} \end{cases}$

Définition 7 – Table de vérité

Soient φ une formule et V un sur-ensemble de $\text{Var}(\varphi)$ non vide. La sémantique de la formule φ (paramétrée par V) est une fonction associant chaque environnement σ sur V à la valeur $[\varphi]_\sigma$ prise par φ pour l'environnement σ. Cette fonction est aussi appelée table de vérité. Elle est notée $[\![\varphi]\!]_V$.

Définition 8 – Équivalence sémantique

Soit φ_1 et φ_2 deux formules du calcul propositionnel. Nous dirons que φ_1 et φ_2 sont équivalentes sur le point sémantique si et seulement si les deux tables de vérités coïncident ie. $[\![\varphi 1]\!]_{\text{Var}(\varphi_1)\cup\text{Var}(\varphi_2)} = [\![\varphi 2]\!]_{\text{Var}(\varphi_1)\cup\text{Var}(\varphi_2)}$. Dans ce cas, nous noterons $\varphi_1 \equiv \varphi_2$.

Définition 9 – Tautologie

Soit φ une formule. Nous dirons que φ est une tautologie si et seulement si $\varphi \equiv \top$.

Définition 10 – Contradiction

Soit φ une formule. Nous dirons que φ est une contradiction si et seulement si $\varphi \equiv \bot$.

3 Autres connecteurs logiques

En théorie, il peut y avoir 4 (2^{2^1}) connecteurs unaires avec des sémantiques différentes, 16 (2^{2^2}) connecteurs binaires avec des sémantiques différentes, (puis 2^{2^3} connecteurs ternaires). Certains opérateurs ont une importance particulière, comme l'implication ou l'équivalence, puisqu'ils sont couramment utilisés dans le langage naturel. Les autres sont une curiosité qu'on ne développera pas ici.

On introduit un nouveau connecteur dans la construction des formules : l'implication.

Définition 11 – Implication

On introduit le connecteur $\Rightarrow$: $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ est une formule propositionnelle. On lui donne la sémantique :

$$[(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)]_\sigma = \begin{cases} tt & \text{si } [\varphi_1]_\sigma = ff \text{ ou } [\varphi_2]_\sigma = tt \\ ff & \text{sinon;} \end{cases}$$

Proposition 1

Nous avons :

$$(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \equiv ((\neg\varphi_1) \vee \varphi_2).$$

Proposition 2

Nous remarquons que $(\perp \Rightarrow \varphi_1)$ est une tautologie

Définition 12 – Équivalence

On introduit le connecteur $\Leftrightarrow$: $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ est une formule propositionnelle. On lui donne la sémantique :

$$[(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)]_\sigma = \begin{cases} tt & \text{si } [\varphi_1]_\sigma = [\varphi_2]_\sigma \\ ff & \text{sinon;} \end{cases}$$

Proposition 3

Nous avons :

$$(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2) \equiv ((\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \varphi_1)).$$

4 Les règles de calcul

Proposition 4 – De Morgan

$$(\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)) \equiv ((\neg\varphi_1) \wedge (\neg\varphi_2))$$
$$(\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)) \equiv ((\neg\varphi_1) \vee (\neg\varphi_2))$$

Proposition 5 – Tiers exclu

$$(\neg(\neg\varphi_1)) \equiv \varphi_1$$

Proposition 6

La relation $\equiv$ est une relation d'équivalence, c'est à dire :

— $\varphi_1 \equiv \varphi_1$ (réflexivité) ;

— si $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ et $\varphi_2 \equiv \varphi_3$ alors $\varphi_1 \equiv \varphi_3$ (transitivité) ;

— si $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ alors $\varphi_2 \equiv \varphi_1$ (symétrie).

Corollaire 1

$$(\neg(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)) \equiv (\varphi_1 \wedge (\neg\varphi_2))$$