Raisonnement

Marc CHEVALIER
DI ENS

21 septembre 2017

1 Déduction

Proposition 1 – Modus ponens

Si φ_1 et $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ sont des tautologies, alors φ_2 est une tautologie.

Nous pouvons appliquer le principe de déduction aux équivalences :

Proposition 2

Soient φ_1 et φ_2 deux formules du calcul propositionnel. Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ et φ_1 sont des tautologies ;
2. $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ et φ_2 sont des tautologies.

2 Prouver que $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$

Théorème 1

Les formules

$$((\varphi \Rightarrow \varphi_1) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2)))$$

et

$$((\varphi \Rightarrow \varphi_2) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2)))$$

sont des tautologies.

Nous en déduisons le schéma de déduction suivant. Pour prouver que la formule $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$ est une tautologie, il suffit de prouver que la formule

$(\varphi \Rightarrow \varphi_1)$ ou/et que la formule $(\varphi \Rightarrow \varphi_2)$ est une tautologie.

3 Prouver que $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$

Le but de cette sous-section est de donner un schéma de preuves pour démontrer qu'une formule de calcul propositionnel de la forme $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$ est une tautologie. Nous commençons par donner un lemme de déduction pour les conjonctions de formules.

Lemme 1

Les formules φ_1 et φ_2 sont des tautologies, si et seulement si la formule $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ est une tautologie.

Puis nous formalisons les preuves de conjonctions par la tautologie suivante.

Théorème 2 – Prouver une conjonction

La formule $((\varphi \Rightarrow \varphi_1) \wedge (\varphi \Rightarrow \varphi_2)) \Longleftrightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$ est une tautologie.

Nous en déduisons le schéma de déduction suivant. Pour prouver que la formule $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$ est une tautologie, il suffit de prouver que $(\varphi \Rightarrow \varphi_1)$ et $(\varphi \Rightarrow \varphi_2)$ sont des tautologies.

4 Le raisonnement par contraposition

Théorème 3 – Contraposée

La formule $((\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \Leftrightarrow ((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1)))$ est une tautologie

Nous déduisons que la formule $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ est une tautologie si et seulement si $((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1))$ est une tautologie.

On peut évidemment appliquer le modus ponens à une contraposée ; c'est le principe du modus tollendo tollens, abrégé modus tollens (du latin signifiant « procédé qui nie en niant ».)

Corollaire 1 – Modus tollens

Si $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ et $(\neg\varphi_2)$ sont des tautologies, alors $(\neg\varphi_1)$ est une tautologie.

Démonstration. Il s'agit simplement d'appliquer le modus ponens à la contraposée de l'implication. □

5 Le raisonnement par l'absurde

Théorème 4 – Raisonnement par l'absurde

La formule $(((\neg\varphi) \Rightarrow \bot) \Rightarrow \varphi)$ est une tautologie.

Nous obtenons la méthode de raisonnement suivante : pour prouver une proposition φ, nous pouvons supposer que φ est fausse et essayer d'aboutir à une contradiction. En cas de succès, nous pouvons déduire que la proposition φ est vraie.

6 Preuve par cas

Théorème 5

La formule $((((\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \Rightarrow \varphi)) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow \varphi)$ est une tautologie.

Nous en déduisons le principe de preuve suivant. Pour prouver une formule φ du calcul propositionnel, il suffit de trouver deux formules φ_1 et φ_2 telles que $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi)$, et $(\varphi_2 \Rightarrow \varphi)$ soient des tautologies.

En appliquant le théorème de démonstration par cas, au cas particulier où le but est une disjonction $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, et les deux cas sont φ_1 et $\neg\varphi_1$. Nous obtenons la tautologie suivante :

Théorème 6

La formule $(((\neg\varphi_1) \Rightarrow \varphi_2) \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$ est une tautologie.