

Raisonnement

Marc Chevalier
marc.chevalier@ens.fr

DI ENS

18 septembre 2017

Déduction

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$

Le raisonnement par
contraposition

Le raisonnement par
l'absurde

Preuve par cas

Déduction

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$

Le raisonnement par contraposition

Le raisonnement par l'absurde

Preuve par cas

Déduction

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$

Le raisonnement par
contraposition

Le raisonnement par
l'absurde

Preuve par cas

Déduction

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$

Le raisonnement par contraposition

Le raisonnement par l'absurde

Preuve par cas

Déduction

Déduction

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$

Le raisonnement par
contraposition

Le raisonnement par
l'absurde

Preuve par cas

Proposition 1 – Modus ponens

Si φ_1 et $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ sont des tautologies, alors φ_2 est une tautologie.

Déduction

Déduction

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$

Le raisonnement par
contraposition

Le raisonnement par
l'absurde

Preuve par cas

Exemple 1

(« Je pense » \Rightarrow « je suis ») or « je pense » donc « je suis ».

Déduction

Déduction

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$

Le raisonnement par
contraposition

Le raisonnement par
l'absurde

Preuve par cas

Proposition 2

Soient φ_1 et φ_2 deux formules du calcul propositionnel. Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ et φ_1 sont des tautologies ;
2. $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ et φ_2 sont des tautologies.

On peut utiliser une équivalence comme des implications dans les deux sens.

Déduction

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$

Le raisonnement par
contraposition

Le raisonnement par
l'absurde

Preuve par cas

Déduction

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$

Le raisonnement par contraposition

Le raisonnement par l'absurde

Preuve par cas

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$

Dédution

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$ Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$ Le raisonnement par
contrapositionLe raisonnement par
l'absurde

Preuve par cas

Théorème 1

Les formules

$$\left((\varphi \Rightarrow \varphi_1) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2)) \right)$$

et

$$\left((\varphi \Rightarrow \varphi_2) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2)) \right)$$

sont des tautologies.

Pas très intéressant car $(\varphi \Rightarrow \varphi_1)$ est plus précis que $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$.

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$

Dédution

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$ Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$ Le raisonnement par
contrapositionLe raisonnement par
l'absurde

Preuve par cas

Exemple 2

On veut prouver $(n \text{ premier} \Rightarrow (n > 1 \vee n = 0))$. Or, tout entier premier est supérieur à 2. Donc, tout entier premier est supérieur à 2 ou premier.

Déduction

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$

Le raisonnement par
contraposition

Le raisonnement par
l'absurde

Preuve par cas

Déduction

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$

Le raisonnement par contraposition

Le raisonnement par l'absurde

Preuve par cas

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$

Dédution

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$ **Prouver** $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$ Le raisonnement par
contrapositionLe raisonnement par
l'absurde

Preuve par cas

Lemme 1

Les formules φ_1 et φ_2 sont des tautologies, si et seulement si la formule $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ est une tautologie.

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$

Dédution

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$ **Prouver** $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$ Le raisonnement par
contrapositionLe raisonnement par
l'absurde

Preuve par cas

Théorème 2 – Prouver une conjonction

La formule $((\varphi \Rightarrow \varphi_1) \wedge (\varphi \Rightarrow \varphi_2)) \iff (\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$ est une tautologie.

Déduction

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$

**Le raisonnement par
contraposition**

Le raisonnement par
l'absurde

Preuve par cas

Déduction

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$

Le raisonnement par contraposition

Le raisonnement par l'absurde

Preuve par cas

Le raisonnement par contraposition

Dédution

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$ Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$ **Le raisonnement par
contraposition**Le raisonnement par
l'absurde

Preuve par cas

Théorème 3 – Contraposée

La formule $((\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \Leftrightarrow ((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1)))$ est une tautologie

Le raisonnement par contraposition

Dédution

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$ Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$ **Le raisonnement par
contraposition**Le raisonnement par
l'absurde

Preuve par cas

Exemple 3
$$(\text{« Je pense »} \Rightarrow \text{« Je suis »}) \Leftrightarrow (\text{« Je ne suis pas »} \Rightarrow \text{« Je ne pense pas »})$$

Le raisonnement par contraposition

Exemple 4

Nous pouvons montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, si x est plus petit que tous les réels strictement positifs, alors x est inférieur ou égal à 0.

Démonstration.

On va prouver la contraposée :

$(x > 0 \Rightarrow \text{il existe un réel strictement positif plus petit que } x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose x strictement positif.

$\frac{x}{2} > 0$ et $\frac{x}{2} < x$. Donc il existe un réel strictement positif plus petit que x . □

Le raisonnement par contraposition

Corollaire 1 – Modus tollens

Si $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ et $(\neg\varphi_2)$ sont des tautologies, alors $(\neg\varphi_1)$ est une tautologie.

Démonstration.

On utilise la contraposée de $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ qui est équivalent à $((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1))$
or, comme on a $(\neg\varphi_2)$, on applique le modus ponens pour déduire $(\neg\varphi_1)$. \square

Déduction

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$

Le raisonnement par
contraposition

**Le raisonnement par
l'absurde**

Preuve par cas

Déduction

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$

Le raisonnement par contraposition

Le raisonnement par l'absurde

Preuve par cas

Le raisonnement par l'absurde

Dédution

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$ Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$ Le raisonnement par
contrapositionLe raisonnement par
l'absurde

Preuve par cas

Théorème 4 – Raisonnement par l'absurde

La formule $\left(\left((\neg\varphi) \Rightarrow \perp \right) \Rightarrow \varphi \right)$ est une tautologie.

En français : si $(\neg\varphi)$ mène à une contradiction, alors $(\neg\varphi)$ est faux (donc φ est vrai).

Le raisonnement par l'absurde

Exemple 5

Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Démonstration.

Par l'absurde, on prouve $\varphi := \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

On va prouver que $(\neg\varphi)$ (c'est à dire $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$) implique une contradiction, c'est à dire $(\varphi \Rightarrow \perp)$. Or on sait que $\left(\left((\neg\varphi) \Rightarrow \perp \right) \Rightarrow \varphi \right)$, donc φ (modus ponens). \square

Déduction

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$

Le raisonnement par
contraposition

Le raisonnement par
l'absurde

Preuve par cas

Déduction

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$

Le raisonnement par contraposition

Le raisonnement par l'absurde

Preuve par cas

Preuve par cas

Dédution

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$ Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$ Le raisonnement par
contrapositionLe raisonnement par
l'absurde

Preuve par cas

Théorème 5

La formule $\left(\left(\left((\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \Rightarrow \varphi) \right) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \varphi) \right) \Rightarrow \varphi \right)$ est une tautologie.

Preuve par cas

Exemple 6

Démontrer que pour tout entier naturel n , l'entier $n \cdot (n + 1)$ est divisible par 2.

Démonstration.

On veut prouver $\varphi := n \cdot (n + 1)$ est pair.

Les deux cas : $\varphi_1 := n$ est pair ; $\varphi_2 := n$ est impair

- φ_1 On suppose n pair, donc n est divisible par 2, $n \cdot (n + 1)$ est divisible par 2.
- φ_2 On suppose n impair, donc $n + 1$ est divisible par 2, $n \cdot (n + 1)$ est divisible par 2.

De plus, $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ est vrai, donc φ est vrai. □

Preuve par cas

Dédution

Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$ Prouver $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$ Le raisonnement par
contrapositionLe raisonnement par
l'absurde

Preuve par cas

Théorème 6

La formule $\left(\left((\neg\varphi_1) \Rightarrow \varphi_2 \right) \Leftrightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2) \right)$ est une tautologie.

Preuve par cas

Exemple 7

Soit $n \in \mathbb{R}$. On veut prouver $(n \geq 0 \vee n < 0)$. $\varphi_1 := n \geq 0$ et $\varphi_2 := n < 0$.
On suppose $(\neg\varphi_1)$, c'est à dire, on suppose $(\neg n \geq 0)$, ie. $n < 0$. D'où φ_2 .

En effet, soit φ_1 est vrai, donc $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ est vrai. Ou alors φ_1 est faux. On en déduit alors φ_2 . Donc $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$.