

# Ensembles et relations

Marc CHEVALIER  
DI ENS

25 septembre 2017

## Résumé

La notion d'ensemble est couramment utilisée en Mathématiques, et ce dès les plus petites classes. Or définir ce qu'est un ensemble est loin d'être simple. D'une part, comme le remarqua Bertrand RUSSEL au début du XX<sup>e</sup> siècle, il ne peut exister un ensemble contenant tous les ensembles. D'autre part, nous ne savons pas si la théorie des ensembles est consistante, ou non (ie. si il existe un modèle de la théorie des ensembles avec deux ensembles différents, c'est à dire dans laquelle il existe des propositions qui ne sont pas des tautologies).

Cette semaine nous donnons quelques notions de théorie de ensembles. Nous introduisons des axiomes et des propriétés qui permettent de former des nouveaux ensembles à partir d'ensembles existants. Enfin, nous expliquons comment construire les notions de relations et de fonctions à partir de la notion d'ensembles.

## 1 Ensembles et éléments

Nous définissons les ensembles comme des collections non ordonnée et sans répétition d'objets. Cependant toutes les collections d'objets ne sont pas des ensembles.

### Définition 1 – Ensemble

Un ensemble est une collection non ordonnée et sans répétition d'objets. Si  $a, b, c$  sont des éléments, nous notons  $\{a, b, c\}$  l'ensemble formé des éléments  $a, b$ , et  $c$ .

### Remarque 1

Un ensemble peut être fini, ou non.

### Exemple 1

Nous donnons quelques exemples d'ensembles finis :

- $\{\text{bleu, rouge}\}$ ,
- l'ensemble  $\llbracket 0, 9 \rrbracket$  des chiffres dans le système décimal ;
- l'ensemble vide  $\emptyset$  est un ensemble ;

et quelques exemples d'ensembles infinis :

- l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers naturels ;
- l'ensemble  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels ;
- l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels ;
- l'ensemble  $[0; 1]$  des réels compris entre 0 et 1.

Un ensemble est caractérisé par ses éléments. Nous définissons la notion d'appartenance ci-dessous.

### Définition 2 – Appartenance

Nous notons :

$$x \in X$$

le fait qu'un objet  $x$  soit un élément de l'ensemble  $X$ .

### Exemple 2

Nous avons :

- $\text{bleu} \in \{\text{bleu, rouge}\}$  ;
- $\text{jaune} \notin \{\text{bleu, rouge}\}$  ;
- $0 \in \mathbb{N}$  ;
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$  ;
- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

### Définition 3 – Égalité (axiome d'extensionnalité)

Nous dirons que deux ensembles  $X$  et  $Y$  sont égaux si et seulement si les deux assertions suivantes sont satisfaites :

1. tout élément de l'ensemble  $X$  est un élément de l'ensemble  $Y$  ;
2. tout élément de l'ensemble  $Y$  est un élément de l'ensemble  $X$ .

### Exemple 3

Par exemple, nous avons :

- $\{\text{bleu, rouge}\} = \{\text{rouge, bleu}\}$  ;
- $\{\text{jaune, rouge}\} \neq \{\text{rouge, bleu}\}$ .

## 2 Algèbre

Nous montrons maintenant comment construire de nouveaux ensembles à partir d'ensembles existants. À priori, nous ne savons pas quels ensembles existent, donc nous avons besoin d'axiome pour justifier l'existence de certaines constructions. Nous essayons d'introduire aussi peu d'axiomes que possibles pour justifier l'existence de la réunion, l'intersection, l'ensemble des parties, et le produit cartésien.

Dans cette section, nous considérons deux ensembles  $A$  et  $B$ .

Rien ne nous permet de prouver que la réunion de deux ensembles est un ensemble. Nous devons le supposer :

### Axiome 1 (Axiome de la réunion).

La collection des éléments de  $A$  et des éléments de  $B$  est un ensemble.

### Définition 4 – Réunion

Nous appelons la réunion de  $A$  et  $B$  l'ensemble des éléments de  $A$  et des éléments de  $B$ , et nous la notons  $A \cup B$ .

### Exemple 4

Par exemple, nous avons :

- $\{1, 2\} \cup \{6, 4\} = \{1, 4, 2, 6\}$  ;
- $\{1, 3, 4\} \cup \{5, 1, 2\} = \{5, 2, 3, 1, 4\}$ .

L'intersection entre deux ensembles, la différence entre ensembles, et la différence symétrique sont tous des parties d'un autre ensemble. Pour justifier leur existence, il suffit de supposer qu'une partie d'un ensemble est elle-même un ensemble.

### Axiome 2 (Axiome de compréhension).

Toute collection d'objets tous éléments de  $A$  est un ensemble.

Grâce à l'axiome précédent, nous pouvons définir les parties de l'ensemble  $A$ .

**Définition 5 – Partie**

Si  $X$  est une collection d'objets tous éléments de  $A$ , nous disons que  $X$  est une partie (ou un sous-ensemble) de  $A$ , ce que nous notons  $X \subseteq A$ .

**Proposition 1 – Compréhension**

Si  $A$  est un ensemble et  $P(x)$  un prédicat portant sur les éléments de  $A$ . Alors la partie de  $A$  tel que  $P(x)$  est vrai, est un ensemble. Nous la notons :

$$\{x \in A \mid P(x)\}$$

*Démonstration.* C'est une partie de  $A$  qui est un ensemble. C'est donc un ensemble par l'axiome de compréhension.  $\square$

**Exemple 5**

L'ensemble des nombres paires est noté :

$$\{x \in \mathbb{N} \mid 2 \text{ divise } x\}.$$

L'intersection de deux ensembles  $A$  et  $B$  est une partie de  $A$ , c'est donc un ensemble, comme l'établit la propriété suivante :

**Proposition 2**

La collection des objets qui sont à la fois éléments de l'ensemble  $A$  et de l'ensemble  $B$  est un ensemble.

*Démonstration.* D'après la propriété de compréhension, la collection des éléments de  $A$  qui soient aussi des éléments de  $B$  est un ensemble ( $\{x \in A \mid x \in B\}$ ).  $\square$

Nous pouvons définir la notion d'intersection de deux ensembles.

**Définition 6 – Intersection**

Nous appelons intersection de  $A$  et de  $B$  la collection des objets qui sont à la fois éléments de l'ensemble  $A$  et éléments de l'ensemble  $B$ , et la notons  $A \cap B$ .

**Exemple 6**

Par exemple, nous avons :

$$- \{1, 2\} \cap \{6, 4\} = \emptyset;$$

$$- \{1,3,4\} \cap \{5,1,2\} = \{1\}.$$

De la même manière, la différence entre deux ensembles est un ensemble, comme l'établit la propriété suivante :

### Proposition 3

La collection des objets qui sont dans l'ensemble  $A$  sans être dans l'ensemble  $B$  est un ensemble.

*Démonstration.* D'après la propriété de compréhension, la collection des éléments de  $A$  qui ne sont pas des éléments de  $B$  est un ensemble ( $\{x \in A \mid x \notin B\}$ ).  $\square$

Nous pouvons donc définir la différence entre deux ensembles.

### Définition 7 – Différence

Nous notons  $A \setminus B$  l'ensemble des éléments de l'ensemble  $A$  qui ne sont pas des éléments de l'ensemble  $B$ .

### Exemple 7

Par exemple, nous avons :

- $\{1,2\} \setminus \{6,4\} = \{1,2\}$  ;
- $\{6,4\} \setminus \{1,2\} = \{6,4\}$  ;
- $\{1,3,4\} \setminus \{5,1,2\} = \{3,4\}$  ;
- $\{5,1,2\} \setminus \{1,3,4\} = \{5,2\}$  ;

### Définition 8 – Complémentaire

Soit  $E$  un ensemble et  $F$  une partie de  $E$ . On appelle le complémentaire de  $F$  dans  $E$  l'ensemble  $E \setminus F$ .

Le complémentaire de  $F$  dans  $E$  est noté  $\complement_E F$ . Si  $E$  est clair d'après le contexte, on peut simplement parler du complémentaire de  $F$  et le noter  $\complement F$ .

La différence symétrique qui contient tous les éléments de l'ensemble  $A$  et tous les éléments de  $B$  qui ne sont pas à la fois élément de l'ensemble  $A$  et élément de l'ensemble  $B$  est un ensemble car il peut être obtenu à partir de la réunion et de la différence entre deux ensembles.

### Proposition 4

La collection des objets qui sont élément de l'ensemble  $A$  ou élément de l'ensemble  $B$ , mais pas les deux, est un ensemble.

Par la propriété de différence,  $A \setminus B$  et  $B \setminus A$  sont des ensembles. Puis par la propriété de réunion,  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  est un ensemble. Or tous ces éléments sont soit dans l'ensemble  $A$  soit dans l'ensemble  $B$ , mais pas les deux, et réciproquement, tous les éléments qui sont soit dans l'ensemble  $A$  ou dans l'ensemble  $B$  sans être dans les deux sont dans cet ensemble.

Nous pouvons donc définir la différence symétrique entre deux ensembles.

**Définition 9 – Différence symétrique**

Nous notons  $A \Delta B$  l'ensemble des objets qui sont des éléments de l'ensemble  $A$  ou des éléments de l'ensemble  $B$ , mais pas des deux.

**Exemple 8**

Par exemple, nous avons :

- $\{1, 2\} \Delta \{6, 4\} = \{1, 2, 6, 4\}$  ;
- $\{6, 4\} \Delta \{1, 2\} = \{1, 2, 6, 4\}$  ;
- $\{1, 3, 4\} \Delta \{5, 1, 2\} = \{2, 3, 4, 5\}$  ;
- $\{5, 1, 2\} \Delta \{1, 3, 4\} = \{2, 3, 4, 5\}$  ;

Finalement, nous devons supposer que la collection de toutes les parties d'un ensemble est un ensemble car les axiomes précédents ne permettent pas de le déduire.

**Axiome 3 (Axiome de l'ensemble des parties).**

La collection de toutes les parties de l'ensemble  $A$  est un ensemble.

**Définition 10 – Ensemble des parties**

L'ensemble de toutes les parties de l'ensemble  $A$  est noté  $\mathcal{P}(A)$ .

**Exemple 9**

Par exemple, nous avons :

$$\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}) = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset, \\ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \\ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \\ \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \\ \{1, 2, 3, 4\} \end{array} \right\}$$

**Proposition 5**

Soit  $S$  un ensemble fini avec  $n$  éléments. Alors  $\mathcal{P}(S)$  est un ensemble fini avec  $2^n$  éléments.

*Démonstration.* Une partie est caractérisée par l'absence, ou la présence de chaque élément. Il y a donc  $2^n$  possibilités.  $\square$

### 3 Relations binaires

Dans cette partie, nous introduisons la notion de relation qui permet de relier des éléments de deux ensembles. Par exemple, nous pouvons établir une relation entre des individus et la ville où ils sont nés. Les relations sont très utiles pour formaliser les bases de données. De plus, nous verrons dans les sections suivantes que les équivalences, les ordres, et les fonctions, sont des cas particuliers de relation.

Dans cette section, nous considérons trois ensembles,  $A$ ,  $B$ , et  $C$ .

**Exemple 10**

Dans toute cette partie, nous considérons les individus suivant, chacun défini par un nom, un prénom, une ville, et un âge :

Prénom	Nom	Ville	Âge
Paul	Césame	Paris	17
Prisca	Césame	Paris	19
Élodie	Dubout	Montrouge	15
Jean	Dubout	Montrouge	18
Jean	Pierre	Vincennes	18
Natacha	Rotin	Paris	18

Nous introduisons quatre ensembles :

- l'ensemble *Prénom* des prénoms des individus :  $Prénom := \{Paul, Prisca, Élodie, Jean, Natacha\}$  ;
- l'ensemble *Nom* des noms des individus :  $Nom := \{Césame, Dubout, Pierre, Satin\}$  ;
- l'ensemble *Ville* des villes des individus :  $Ville := \{Paris, Montrouge, Vincennes, Paris\}$  ;
- l'ensemble *Âge* des âges des individus :  $Âge := \{15, 17, 18, 19\}$ .

### Définition 11 – Couple

Nous appelons un couple la donnée de deux objets  $a$  et  $b$ . Nous notons un tel couple  $(a, b)$ . Nous appelons  $a$  la première coordonnée de  $(a, b)$  et  $b$  la seconde coordonnée.

Comme rien ne nous permet de montrer que la collection des couples dont la première coordonnée est dans l'ensemble  $A$  et la seconde dans l'ensemble  $B$ , est un ensemble, nous donnons un axiome pour le supposer.

### Axiome 4.

Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles. La collection des couples dont la première coordonnée est dans l'ensemble  $A$  et la deuxième coordonnée est dans l'ensemble  $B$  est un ensemble.

Nous pouvons maintenant définir la notion de produit cartésien.

### Définition 12 – produit cartésien

Nous appelons produit cartésien entre l'ensemble  $A$  et l'ensemble  $B$  l'ensemble des couples dont la première coordonnée est un élément de l'ensemble  $A$  et la seconde un élément de l'ensemble  $B$ . Nous notons  $A \times B$  le produit cartésien entre l'ensemble  $A$  et l'ensemble  $B$ . De plus, nous notons  $A^2$  le produit cartésien entre l'ensemble  $A$  et lui-même.

### Exemple 11

Par exemple, le produit cartésien entre l'ensemble  $Nom$  et l'ensemble  $\hat{A}ge$  est l'ensemble suivant :

$$Nom \times \hat{A}ge = \left\{ \begin{array}{l} (Césame, 15), (Césame, 17), (Césame, 18), (Césame, 19), \\ (Dubout, 15), (Dubout, 17), (Dubout, 18), (Dubout, 19), \\ (Pierre, 15), (Pierre, 17), (Pierre, 18), (Pierre, 19), \\ (Satin, 15), (Satin, 17), (Satin, 18), (Satin, 19), \end{array} \right\}$$

### Définition 13 – Relation binaire

Nous appelons relation binaire entre  $A$  et  $B$  toute partie de  $A \times B$ . Lorsque  $\mathcal{R}$  est une relation (binaire) entre  $A$  et  $B$ , nous notons  $a\mathcal{R}b$  pour dire que le couple  $(a, b)$  est élément de  $\mathcal{R}$  (ie.  $(a, b) \in \mathcal{R}$ ).



$$\mathcal{R}_{\text{Prénom},\text{Nom}} := \left\{ \begin{array}{l} (\text{Paul}, \text{Césame}), \\ (\text{Prisca}, \text{Césame}), \\ (\text{Élodie}, \text{Dubout}), \\ (\text{Jean}, \text{Dubout}), \\ (\text{Jean}, \text{Pierre}), \\ (\text{Natacha}, \text{Rotin}) \end{array} \right\}$$

(a) Relation entre le champ Prénom et le champ Nom

$$\mathcal{R}_{\text{Prénom},\text{Ville}} := \left\{ \begin{array}{l} (\text{Paul}, \text{Paris}), \\ (\text{Prisca}, \text{Paris}), \\ (\text{Élodie}, \text{Montrouge}), \\ (\text{Jean}, \text{Montrouge}), \\ (\text{Jean}, \text{Vincennes}), \\ (\text{Natacha}, \text{Paris}) \end{array} \right\}$$

(b) Relation entre le champ Prénom et le champ Ville

$$\mathcal{R}_{\text{Prénom},\text{Âge}} := \left\{ \begin{array}{l} (\text{Paul}, 17), \\ (\text{Prisca}, 19), \\ (\text{Élodie}, 15), \\ (\text{Jean}, 18), \\ (\text{Jean}, 18), \\ (\text{Natacha}, 18) \end{array} \right\}$$

(c) Relation entre le champ Prénom et le champ Âge

$$\mathcal{R}_{\text{Nom},\text{Ville}} := \left\{ \begin{array}{l} (\text{Césame}, \text{Paris}), \\ (\text{Dubout}, \text{Montrouge}), \\ (\text{Pierre}, \text{Vincennes}), \\ (\text{Rotin}, \text{Paris}) \end{array} \right\}$$

(d) Relation entre le champ Nom et le champ Ville

$$\mathcal{R}_{\text{Nom},\text{Âge}} := \left\{ \begin{array}{l} (\text{Césame}, 19), \\ (\text{Dubout}, 15), \\ (\text{Dubout}, 18), \\ (\text{Rotin}, 18) \end{array} \right\}$$

(e) Relation entre le champ Nom et le champ Âge

$$\mathcal{R}_{\text{Ville},\text{Âge}} := \left\{ \begin{array}{l} (\text{Paris}, 17), \\ (\text{Paris}, 19), \\ (\text{Montrouge}, 15), \\ (\text{Montrouge}, 18), \\ (\text{Vincennes}, 18), \\ (\text{Paris}, 18) \end{array} \right\}$$

(f) Relation entre le champ Ville et le champ Âge

FIGURE 1 – Différentes relations binaires entre les champs pour l'exemple 3.

### Exemple 12

Nous introduisons six relations binaires Fig. 1 qui représentent les relations entre les différents champs (*Prénom*, *Nom*, *Ville*, et *Âge*) de l'exemple 3.

Nous remarquons que la relation  $\mathcal{R}_{Nom, \hat{Age}}$  contient beaucoup moins de couples que le produit cartésien entre les ensembles *Nom* et  $\hat{Age}$ . La relation donne donc une information plus précise. Il nous est en effet impossible de dire que qu'il n'existe personne dont le nom est *Césame* et l'âge 15 si nous ne connaissons que  $Nom \times \hat{Age}$

## 4 Ordre et équivalence

Nous introduisons maintenant les équivalences et les ordres qui sont des relations binaires particulières. Les équivalences permettent de regrouper les éléments d'un ensemble selon un critère. On peut ainsi identifier les individus qui ont le même âge. Ceci correspond à une abstraction. Les relations d'ordre permettent de comparer des éléments selon un critère.

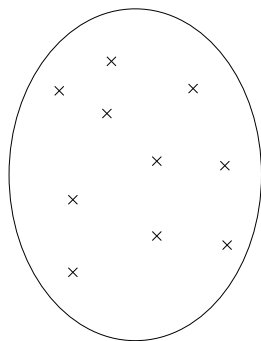
### 4.1 Relation d'équivalence

Définissons formellement la notion d'équivalence. Une relation d'équivalence est une relation binaire entre un ensemble et lui-même qui vérifie certaines propriétés de bonnes formations. En effet, tout élément doit être identifiable à lui-même. Si un élément est identifiable à un autre, nous devons pouvoir faire l'identification dans l'autre sens. Enfin, si un premier élément est identifiable à un autre, lui-même identifiable à un troisième, alors nous devons pouvoir identifier le premier et le troisième élément. Ceci nous donne la définition suivante.

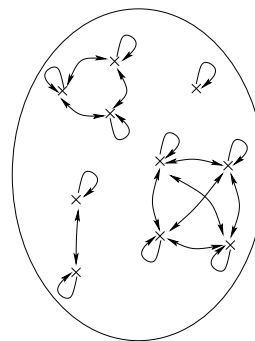
#### Définition 14 – Relation d'équivalence sur un ensemble

Soit  $A$  un ensemble et  $\mathcal{R}$  une relation binaire entre l'ensemble  $A$  et lui-même. Nous dirons que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur l'ensemble  $A$  si et seulement si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

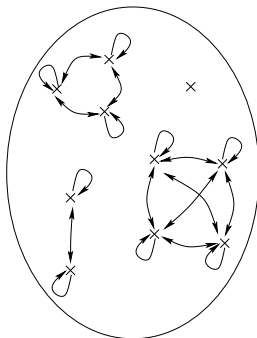
1. (réflexivité) pour tout élément  $x \in A$ , nous avons :  $x\mathcal{R}x$  ;
2. (symétrie) pour toute paire d'éléments  $(x, y) \in A^2$  telle que  $x\mathcal{R}y$ , nous avons :  $y\mathcal{R}x$  ;
3. (transitivité) pour toute triplet d'éléments  $x, y, z \in A$  tel que  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}z$ , nous avons :  $x\mathcal{R}z$ .



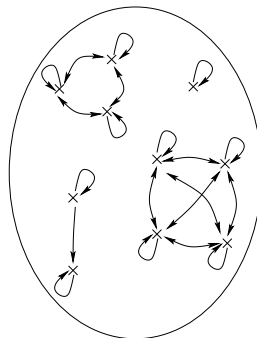
(a) Un ensemble.



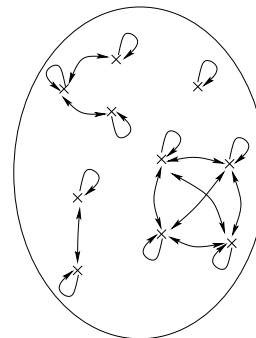
(b) Une relation d'équivalence.



(c) Une relation non réflexive.



(d) Une relation non symétrique.



(e) Une relation non transitive.

FIGURE 2 – Exemples et contre-exemples de relations d'équivalence.

### Exemple 13

Nous donnons des exemples de relations d'équivalence qui existent quelque soit l'ensemble que nous considérons. La première relation ignore toute différence entre les éléments de l'ensemble. C'est la relation d'équivalence qui perd le plus d'information. La seconde est la relation qui n'identifie que les éléments égaux. C'est la relation qui ne perd aucune information.

Soit  $X$  un ensemble.

1.  $X^2$  est la relation (grossière), telle que toute paire d'éléments est en relation, est une relation d'équivalence.
2.  $\Delta_X := \{(x, x) \in X^2 \mid x \in X\}$ , la relation (fine) telle qu'aucune paire d'éléments de  $X$  distincts n'est en relation, est une relation d'équivalence.

*Démonstration.*

1. — Soit  $x \in X$ , nous avons  $(x, x) \in X^2$ .  
 — Soit  $(x, y) \in X^2$ , nous avons  $y \in X$  et  $x \in X$ , d'où  $(y, x) \in X^2$ .  
 — Soit  $(x, y) \in X^2$  et  $(y, z) \in X^2$ , nous avons  $x \in X$  et  $z \in X$ , d'où  $(x, z) \in X^2$ .

Donc  $X^2$  est une relation d'équivalence sur  $X$ .

2. — Soit  $x \in X$ , nous avons  $x \Delta_X x$ .  
 — Soit  $x, y \in X$  tel que  $x \Delta_X y$ , nous avons  $x = y$ , puis  $y = x$  et  $y \Delta_X x$ .  
 — Soit  $x, y, z \in X$  tel que  $x \Delta_X y$  et  $y \Delta_X x$ , nous avons  $x = y$  et  $y = z$ , puis  $x = z$ , d'où  $x \Delta_X z$ .

Ainsi  $\Delta_X$  est une relation d'équivalence sur  $X$ .

□

#### Exemple 14

Nous donnons des exemples et des contre-exemples de relations d'équivalence.

Soit  $A$  un ensemble d'êtres humains.

1. La relation qui contient tous et uniquement les couples d'habitants qui sont nés dans la même ville, est une relation d'équivalence.
2. La relation qui contient tous et uniquement les couples d'habitants qui portent un vêtement (n'importe lequel) d'une même couleur, n'est pas une relation d'équivalence.

*Démonstration.*

1. — Chaque individu est né dans la même ville que lui-même.  
 — Si un individu  $x$  est né dans la même ville qu'un individu  $y$ . Alors l'individu  $y$  est né dans la même ville que l'individu  $x$ .  
 — Si un individu  $x$  est né dans la même ville qu'un individu  $y$ , lui-même né dans la même ville qu'un troisième individu  $z$ . Alors  $x$  est né dans la même ville que l'individu  $z$ .
2. Cette relation n'est pas transitive en général. Supposant un individu  $x$  ne portant que du bleu, un individu  $y$  ne portant que du bleu et du noir, et un individu  $z$  ne portant que du noir. Alors les individus  $x$  et  $y$  seraient en relation, ainsi que les individus  $y$  et  $z$ . Or les individus  $x$  et  $z$  ne sont pas en relation.

□

**Exemple 15**

Nous donnons d'autres exemples et contre-exemples Fig. 2.

On prend  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $A$ .

**Définition 15**

Soit  $x \in A$ . L'ensemble

$$\{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$$

est appelée la classe d'équivalence de  $x$  et est notée  $\bar{x}$  ou  $\text{cl}(x)$

On peut parfois trouver la notation  $\bar{x}$  mais comme elle est utilisée pour plein d'autres choses, on l'évite.

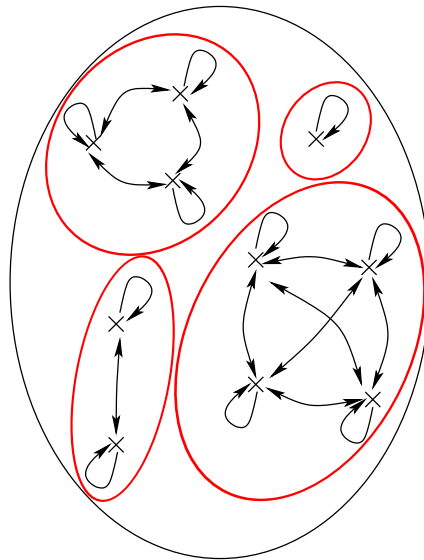


FIGURE 3 – Les classes d'équivalence

La figure 3 représente les classes d'équivalence de la relation prise pour exemple.

**Exemple 16**

Pour la relation d'égalité, la classe d'équivalence de n'importe quel  $x$  est  $\{x\}$ .

Pour la relation grossière, il n'y a qu'une classe d'équivalence :  $A$ .

**Exemple 17**

On pose  $\mathcal{R}$  la relation définie sur  $\mathbb{N}$  par

$$x\mathcal{R}y :\Leftrightarrow x - y \text{ est pair}$$

On a par exemple  $2\mathcal{R}4$ ,  $1\mathcal{R}3$  et  $0\mathcal{R}4$ .

Il y a deux classe d'équivalence : l'ensemble des entiers pairs et l'ensemble des entiers impairs.

En effet, la différence entre deux entiers pairs (resp. impairs) est paire alors que la différence entre un entier pair et un entier impair est toujours impair.

Dans l'exemple 4.1, la classe d'équivalence d'une personne est l'ensemble des gens nés dans la même ville que lui (y compris lui).

**Proposition 6**

$$\forall x \in A, x \in \text{cl}(x)$$

*Démonstration.* On a en effet  $x\mathcal{R}x$ . Donc  $x$  appartient à sa propre classe d'équivalence.  $\square$

**Proposition 7**

Soit  $(x, y) \in A^2$ . Si  $x\mathcal{R}y$  alors  $\text{cl}(x) = \text{cl}(y)$ .

*Démonstration.* Soit  $x$  et  $y$  des éléments de  $A$ . On suppose  $x\mathcal{R}y$ . On prouve la double inclusion.

—  $\text{cl}(x) \subseteq \text{cl}(y)$  : Soit  $z \in \text{cl}(x)$ . On a donc  $z\mathcal{R}x$ . Or  $x\mathcal{R}y$ . Donc  $z\mathcal{R}y$ . Donc  $z \in \text{cl}(y)$ .

—  $\text{cl}(y) \subseteq \text{cl}(x)$  : Soit  $z \in \text{cl}(y)$ . On a donc  $z\mathcal{R}y$ . Or  $x\mathcal{R}y$ . Donc  $z\mathcal{R}x$ . Donc  $z \in \text{cl}(x)$ .

Donc on a  $\text{cl}(x) = \text{cl}(y)$ .  $\square$

**Corollaire 1**

Soit  $(x, y) \in A^2$ . Si  $x\mathcal{R}y$  alors  $x \in \text{cl}(y)$ .

*Démonstration.* Soit  $x$  et  $y$  des éléments de  $A$ . On suppose  $x\mathcal{R}y$ . On a donc  $\text{cl}(x) = \text{cl}(y)$  et  $x \in \text{cl}(x)$ . Donc  $x \in \text{cl}(y)$ .  $\square$

## 4.2 Relation d'ordre

Nous définissons maintenant la notion d'ordre. Un ordre est une relation entre un ensemble et lui-même, qui vérifie des propriétés de bonnes formations. Lorsque deux éléments sont en relation, nous dirons que le premier est plus petit que le second. Tout élément doit être plus petit que lui-même (c'est une notion de comparaison large). Si un élément est plus petit qu'un autre, et que ce second élément est plus petit que le premier, alors ces deux éléments sont égaux (il existe une version sans cette propriété que nous appelons "pré-ordre"). Enfin, si un premier élément est plus petit qu'un autre, lui-même plus petit qu'un troisième, alors nous devons le premier doit être plus petit que le troisième élément. Ceci nous donne la définition suivante.

### Définition 16 – Ordre sur un ensemble

Soit  $A$  un ensemble et  $\mathcal{R}$  une relation binaire entre l'ensemble  $A$  et lui-même. Nous dirons que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre sur l'ensemble  $A$  si et seulement si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

1. (réflexivité) pour tout élément  $x \in A$ , nous avons :  $x\mathcal{R}x$  ;
2. (antisymétrique) pour toute paire d'éléments  $(x, y) \in A^2$  telle que  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}x$ , nous avons :  $x = y$  ;
3. (transitivité) pour toute triplet d'éléments  $x, y, z \in A$  tel que  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}z$ , nous avons :  $x\mathcal{R}z$ .

### Exemple 18

Nous donnons un exemple et un contre-exemple de relations d'ordre qui sont valables quelque soit l'ensemble que nous considérons. La première relation permet de comparer tous couples d'éléments, c'est une relation d'ordre si et seulement si l'ensemble comporte au plus un élément. La seconde est la relation qui n'identifie que les éléments égaux.

Soit  $X$  un ensemble.

1. La relation  $X^2$  qui contient toutes les paires éléments de  $X$  n'est pas une relation d'ordre, sauf si  $X$  possède au plus un élément.
2. Le relation  $\Delta_X := \{(x, x) \in X^2 \mid x \in X\}$  qui contient ne contient aucune paire d'éléments de  $X$  distincts, est une relation d'ordre.

*Démonstration.*

1. (a) Soit  $x \in X$ , nous avons  $(x, x) \in X^2$ .  
(b) Soit  $x, y, z \in X$ , tel que  $(x, y) \in X^2$  et  $(y, z) \in X^2$ , nous avons alors  $(x, z) \in X^2$ .

(c) Nous considérons trois cas.

- i. Si  $X$  ne possède pas d'élément. Pour  $x, y \in X$ , toute propriété est vraie.
- ii. Si  $X$  a un unique élément  $a$ . Soit  $x, y \in X$ , tel que  $(x, y) \in X^2$  et  $(y, x) \in X^2$ . Nous avons  $x = a$  et  $y = a$ . Donc  $x = y$ .
- iii. Sinon, nous considérons  $a, b \in X$  deux éléments distincts. Nous avons  $(a, b) \in X^2$  et  $(b, a) \in X^2$  avec  $a \neq b$ . Donc  $X^2$  n'est pas une relation d'ordre.

Donc  $X^2$  est une relation d'ordre si et seulement si  $X$  admet au plus un élément.

□

### Exemple 19

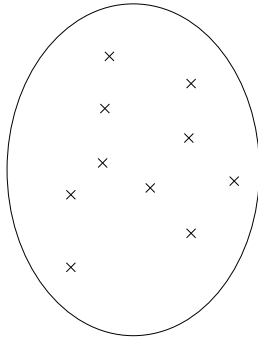
Nous donnons d'autres exemples et des contre-exemples de relations d'ordre.

- La relation entre l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  et lui-même qui contient tous les couples d'entiers  $(m, n)$  tels que  $m \leq n$  est une relation d'ordre.
- La relation entre l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  et lui-même qui contient tous les couples d'entiers  $(m, n)$  tels que  $m \geq n$  est une relation d'ordre.
- La relation entre l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  et lui-même qui contient tous les couples d'entiers  $(m, n)$  tels que  $m < n$  n'est pas une relation d'ordre.
- La relation entre l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  et lui-même qui contient tous les couples d'entiers  $(m, n)$  tels que  $m > n$  n'est pas une relation d'ordre.
- La relation entre l'ensemble des entiers relatifs  $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$  et lui-même qui contient toutes les paires d'entiers  $(m, n)$  telles que  $m$  divise  $n$ , n'est pas une relation d'ordre.
- La relation entre l'ensemble des entiers positifs  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  et lui-même qui contient toutes les paires d'entiers  $(m, n)$  telles que  $m$  divise  $n$ , est une relation d'ordre.
- Soit  $A$  un ensemble d'être humain. La relation qui identifie deux êtres humains  $A$  et  $B$  si l'âge de  $A$  est plus petit que celui de  $B$  est une relation d'ordre si et seulement si il n'existe pas deux êtres humains avec le même âge.

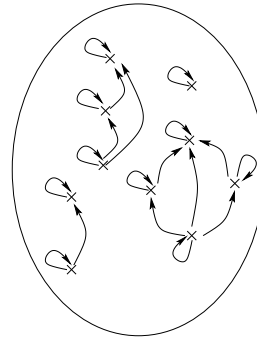


**Exemple 20**

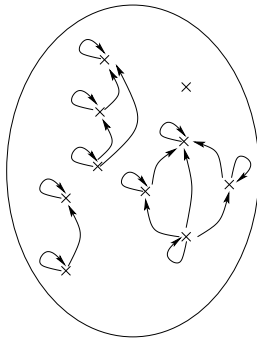
Nous donnons d'autres exemples et contre-exemples Fig. 4.



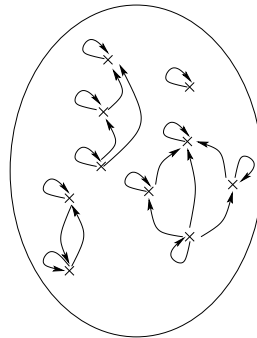
(a) Un ensemble.



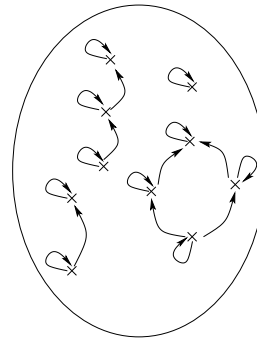
(b) Un relation d'ordre.



(c) Une relation non réflexive.



(d) Une relation non antisymétrique.



(e) Une relation non transitive.

FIGURE 4 – Exemples et contre-exemples de relations d'ordre.

**Remarque 2**

Si  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre sur  $X$  et  $x$  et  $y$  deux éléments de  $X$ , on n'a pas forcément  $x\mathcal{R}y$  ou  $y\mathcal{R}x$ .

**Exemple 21**

La relation d'inclusion sur  $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$  n'est pas totale :  $\{1\} \not\subseteq \{2\}$  et  $\{2\} \not\subseteq \{1\}$

**Définition 17**

Un ordre  $\mathcal{R}$  sur  $X$  est total si pour tout  $x$  et  $y$  dans  $X$ , on a  $x\mathcal{R}y$  ou  $y\mathcal{R}x$

**Exemple 22**

La relation  $\leq$  sur  $\mathbb{R}$  est totale.

On va définir une notion qui permet de généraliser la récurrence.

**Définition 18 – Ordre bien fondé**

Soit  $E$  un ensemble et  $\mathcal{R}$  une relation d'ordre sur  $E$ . On dit que  $\mathcal{R}$  est bien fondé s'il n'existe pas de suite strictement décroissante (au sens de  $\mathcal{R}$ ) d'éléments de  $E$ .

**Définition 19 – Élément extrémal**

Soit  $E$  un ensemble et  $\mathcal{R}$  une relation d'ordre sur  $E$ . Soit  $F \subseteq E$  et  $x \in F$ .  
On dit que  $x$  est un élément maximal de  $F$  si  $F$  ne contient pas d'élément plus grand que  $x$ .  
On dit que  $x$  est un élément minimal de  $F$  si  $F$  ne contient pas d'élément plus petit que  $x$ .

**Proposition 8**

Soit  $E$  un ensemble et  $\mathcal{R}$  une relation d'ordre sur  $E$ .  $\mathcal{R}$  est bien fondé si et seulement si toute partie non vide  $F$  de  $E$  admet un élément minimal.

*Démonstration.*

( $\Rightarrow$ ) On procède par contraposée. On suppose qu'il existe une partie non vide sans élément minimal. On va prouver que par conséquent l'ordre n'est pas bien fondé.

Soit  $F$  une telle partie. On choisit  $u_0$  un élément de  $F$ . Puis on choisit  $u_1$  un élément plus petit que  $u_0$  dans  $F$ . Un tel élément existe, sans quoi  $u_0$  serait un élément minimal. Puis on choisit  $u_2$  de la même façon etc.. On trouve alors une suite strictement décroissante donc l'ordre n'est pas bien fondé.

( $\Leftarrow$ ) On suppose que toute partie non vide  $F$  de  $E$  admet un élément minimal. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeur dans  $E$ . L'ensemble  $\{u_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  admet donc un élément minimal. Donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas une suite strictement décroissante. Donc l'ordre est bien fondé.  $\square$