Ensembles et relations

Marc Chevalier
DI ENS

25 septembre 2017

1 Ensembles et éléments

Définition 1 – Ensemble

Un ensemble est une collection non ordonnée et sans répétition d'objets. Si a, b, c sont des éléments, nous notons $\{a, b, c\}$ l'ensemble formé des éléments a, b, et c.

Définition 2 – Appartenance

Nous notons :

$$x \in X$$

le fait qu'un objet x soit un élément de l'ensemble X.

Définition 3 – Égalité (axiome d'extensionnalité)

Nous dirons que deux ensembles X et Y sont égaux si et seulement si les deux assertions suivantes sont satisfaites :

1. tout élément de l'ensemble X est un élément de l'ensemble Y ;
2. tout élément de l'ensemble Y est un élément de l'ensemble X.

2 Algèbre

Dans cette section, nous considérons deux ensembles A et B.

Définition 4 – Réunion

Nous appelons la réunion de A et B l'ensemble des éléments de A et des éléments de B, et nous la notons $A \cup B$.

Définition 5 – Partie

Si X est une collection d'objets tous éléments de A, nous disons que X est une partie (ou un sous-ensemble) de A, ce que nous notons $X \subseteq A$.

Proposition 1 – Compréhension

Si A est un ensemble et $P(x)$ un prédicat portant sur les éléments de A. Alors la partie de A tel que $P(x)$ est vrai, est un ensemble. Nous la notons :

$$\{x \in A \mid P(x)\}$$

Définition 6 – Intersection

Nous appelons intersection de A et de B la collection des objets qui sont à la fois éléments de l'ensemble A et éléments de l'ensemble B, et la notons $A \cap B$.

Définition 7 – Différence

Nous notons $A \setminus B$ l'ensemble des éléments de l'ensemble A qui ne sont pas des éléments de l'ensemble B.

Définition 8 – Complémentaire

Soit E un ensemble et F une partie de E. On appelle le complémentaire de F dans E l'ensemble $E \setminus F$.
Le complémentaire de F dans E est noté $\complement_E F$. Si E est clair d'après le contexte, on peut simplement parler du complémentaire de F et le noter $\complement F$.

Proposition 2

La collection des objets qui sont élément de l'ensemble A ou élément de l'ensemble B, mais pas les deux, est un ensemble.

Définition 9 – Différence symétrique

Nous notons $A \Delta B$ l'ensemble des objets qui sont des éléments de l'ensemble A ou des éléments de l'ensemble B, mais pas des deux.

Définition 10 – Ensemble des parties

L'ensemble de toutes les parties de l'ensemble A est noté $\mathcal{P}(A)$.

3 Relations binaires

Dans cette partie, nous introduisons la notion de relation qui permettre de relier des éléments de deux ensembles. Par exemple, nous pouvons établir une relation entre des individus et la ville où ils sont nés. Les relations sont très utiles pour formaliser les bases de données. De plus, nous verrons dans les sections suivantes que les équivalences, les ordres, et les fonctions, sont des cas particuliers de relation.

Dans cette section, nous considérons trois ensembles, A, B, et C.

Définition 11 – Couple

Nous appelons un couple la donné de deux objets a et b. Nous notons un tel couple (a, b). Nous appelons a la première coordonnée de (a, b) et b la seconde coordonnée.

Nous pouvons maintenant définir la notion de produit cartésien.

Définition 12 – produit cartésien

Nous appelons produit cartésien entre l'ensemble A et l'ensemble B l'ensemble des couples dont la premières coordonnées est un élément de l'ensemble A et la seconde un élément de l'ensemble B. Nous notons $A \times B$ le produit cartésien entre l'ensemble A et l'ensemble B. De plus, nous notons A^2 le produit cartésien entre l'ensemble A et lui-même.

Définition 13 – Relation binaire

Nous appelons relation binaire entre A et B toute partie de $A \times B$. Lorsque $\mathcal{R}$ est une relation (binaire) entre A et B, nous notons $a\mathcal{R}b$ pour dire que le couple (a, b) est élément de $\mathcal{R}$ (ie. $(a, b) \in \mathcal{R}$).

4 Ordre et équivalence

Nous introduisons maintenant les équivalences et les ordres qui sont des relations binaires particulières. Les équivalences permettent de regrouper les éléments d'un ensemble selon un critère. On peut ainsi identifier les individus qui ont le même âge. Ceci correspond à une abstraction. Les relations d'ordre permettent de comparer des éléments selon un critère.

4.1 Relation d'équivalence

Définition 14 – Relation d'équivalence sur un ensemble

Soit A un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire entre l'ensemble A et lui-même. Nous dirons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble A si et seulement si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

1. (réflexivité) pour tout élément $x \in A$, nous avons : $x\mathcal{R}x$;
2. (symétrie) pour toute paire d'éléments $(x, y) \in A^2$ telle que $x\mathcal{R}y$, nous avons : $y\mathcal{R}x$;
3. (transitivité) pour toute triplet d'éléments $x, y, z \in A$ tel que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, nous avons : $x\mathcal{R}z$.

On prend $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur A.

Définition 15

Soit $x \in A$. L'ensemble

$$\{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$$

est appelée la classe d'équivalence de x et est notée $\dot{x}$ ou $\mathrm{cl}\,(x)$

On peut parfois trouver la notation $\overline{x}$ mais comme elle est utilisée pour plein d'autres choses, on l'évite.

La figure **??** représente les classes d'équivalence de la relation prise pour exemple.

Proposition 3

$$\forall x \in A, x \in \mathrm{cl}\,(x)$$

Proposition 4

Soit $(x, y) \in A^2$. Si $x\mathcal{R}y$ alors $\mathrm{cl}\,(x) = \mathrm{cl}\,(y)$.

Corollaire 1

Soit $(x, y) \in A^2$. Si $x\mathcal{R}y$ alors $x \in \mathrm{cl}\,(y)$.

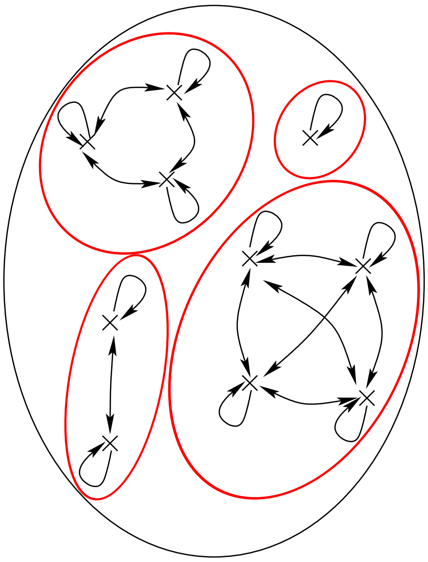

FIGURE 1 – Les classes d'équivalence

4.2 Relation d'ordre

Définition 16 – Ordre sur un ensemble

Soit A un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire entre l'ensemble A et lui-même. Nous dirons que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur l'ensemble A si et seulement si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

1. (réflexivité) pour tout élément $x \in A$, nous avons : $x\mathcal{R}x$;
2. (antisymétrique) pour toute paire d'éléments $(x, y) \in A^2$ telle que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, nous avons : $x = y$;
3. (transitivité) pour toute triplet d'éléments $x, y, z \in A$ tel que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, nous avons : $x\mathcal{R}z$.

Définition 17

Un ordre $\mathcal{R}$ sur X est total si pour tout x et y dans X, on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$

On va définir une notion qui permet de généraliser la récurrence.

Définition 18 – Ordre bien fondé

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est bien fondé s'il n'existe pas de suite strictement décroissante (au sens de $\mathcal{R}$) d'éléments de E.

Définition 19 – Élément extrémal

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E. Soit $F \subseteq E$ et $x \in F$.
On dit que x est un élément maximal de F si F ne contient pas d'élément plus grand que x.
On dit que x est un élément minimal de F si F ne contient pas d'élément plus petit que x.

Proposition 5

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E. $\mathcal{R}$ est bien fondé si et seulement si toute partie non vide F de E admet un élément minimal.