

Ensembles et relations

Marc Chevalier
marc.chevalier@ens.fr

DI ENS

18 septembre 2017

Ensembles et éléments

Algèbre

Relations binaires

Relation d'équivalence

Relation d'ordre

Ensembles et éléments

Algèbre

Relations binaires

Relation d'équivalence

Relation d'ordre

Ensembles et éléments

Définition 1 – Ensemble

Un ensemble est une collection non ordonnée et sans répétition d'objets.
Si a , b , c sont des éléments, nous notons $\{a, b, c\}$ l'ensemble formé des éléments a , b , et c .

Exemple 1

Nous donnons quelques exemples d'ensembles finis :

- ▶ $\{\text{bleu, rouge}\}$,
- ▶ l'ensemble $\llbracket 0, 9 \rrbracket$ des chiffres dans le système décimal ;
- ▶ l'ensemble vide \emptyset est un ensemble ;

et quelques exemples d'ensembles infinis :

- ▶ l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels ;
- ▶ l'ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels ;
- ▶ l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels ;
- ▶ l'ensemble $[0; 1]$ des réels compris entre 0 et 1.

Ensembles et éléments

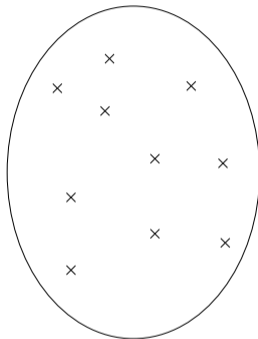


Figure 1 – Un ensemble

Ensembles et éléments

Définition 2 – Appartenance

Nous notons :

$$x \in X$$

le fait qu'un objet x soit un élément de l'ensemble X .

Exemple 2

Nous avons :

- ▶ $\text{bleu} \in \{\text{bleu}, \text{rouge}\}$;
- ▶ $\text{jaune} \notin \{\text{bleu}, \text{rouge}\}$;
- ▶ $0 \in \mathbb{N}$;
- ▶ $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$;
- ▶ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Ensembles et éléments

Définition 3 – Égalité (axiome d'extensionnalité)

Nous dirons que deux ensembles X et Y sont égaux si et seulement si les deux assertions suivantes sont satisfaites :

1. tout élément de l'ensemble X est un élément de l'ensemble Y ;
2. tout élément de l'ensemble Y est un élément de l'ensemble X .

Exemple 3

Par exemple, nous avons :

- ▶ $\{\text{bleu, rouge}\} = \{\text{rouge, bleu}\}$;
- ▶ $\{\text{jaune, rouge}\} \neq \{\text{rouge, bleu}\}$.

Ensembles et éléments

Algèbre

Relations binaires

Relation d'équivalence

Relation d'ordre

Axiome 1 (Axiome de la réunion).

La collection des éléments de A et des éléments de B est un ensemble.

Définition 4 – Réunion

Nous appelons la réunion de A et B l'ensemble des éléments de A et des éléments de B , et nous la notons $A \cup B$.

Exemple 4

Par exemple, nous avons :

- ▶ $\{1, 2\} \cup \{6, 4\} = \{1, 4, 2, 6\}$;
- ▶ $\{1, 3, 4\} \cup \{5, 1, 2\} = \{5, 2, 3, 1, 4\}$.

Axiome 2 (Axiome de compréhension).

Toute collection d'objets tous éléments de A est un ensemble.

Définition 5 – Partie

Si X est une collection d'objets tous éléments de A , nous disons que X est une partie (ou un sous-ensemble) de A , ce que nous notons $X \subseteq A$.

Proposition 1 – Compréhension

Si A est un ensemble et $P(x)$ un prédicat portant sur les éléments de A . Alors la partie de A tel que $P(x)$ est vrai, est un ensemble. Nous la notons :

$$\{x \in A \mid P(x)\}$$

Exemple 5

L'ensemble des nombres paires est noté :

$$\{x \in \mathbb{N} \mid 2 \text{ divise } x\}.$$

Proposition 2

La collection des objets qui sont à la fois éléments de l'ensemble A et de l'ensemble B est un ensemble.

Démonstration.

Exercice. □

Définition 6 – Intersection

Nous appelons intersection de A et de B la collection des objets qui sont à la fois éléments de l'ensemble A et éléments de l'ensemble B , et la notons $A \cap B$.

Exemple 6

Par exemple, nous avons :

- ▶ $\{1, 2\} \cap \{6, 4\} = \emptyset$;
- ▶ $\{1, 3, 4\} \cap \{5, 1, 2\} = \{1\}$.

Proposition 3

La collection des objets qui sont dans l'ensemble A sans être dans l'ensemble B est un ensemble.

Définition 7 – Différence

Nous notons $A \setminus B$ l'ensemble des éléments de l'ensemble A qui ne sont pas des éléments de l'ensemble B .

Exemple 7

Par exemple, nous avons :

- ▶ $\{1, 2\} \setminus \{6, 4\} = \{1, 2\}$;
- ▶ $\{6, 4\} \setminus \{1, 2\} = \{6, 4\}$;
- ▶ $\{1, 3, 4\} \setminus \{5, 1, 2\} = \{3, 4\}$;
- ▶ $\{5, 1, 2\} \setminus \{1, 3, 4\} = \{5, 2\}$;

Définition 8 – Complémentaire

Soit E un ensemble et F une partie de E . On appelle le complémentaire de F dans E l'ensemble $E \setminus F$.

Le complémentaire de F dans E est noté $\complement_E F$. Si E est clair d'après le contexte, on peut simplement parler du complémentaire de F et le noter $\complement F$.

Proposition 4

La collection des objets qui sont élément de l'ensemble A ou élément de l'ensemble B , mais pas les deux, est un ensemble.

Définition 9 – Différence symétrique

Nous notons $A\Delta B$ l'ensemble des objets qui sont des éléments de l'ensemble A ou des éléments de l'ensemble B , mais pas des deux.

Exemple 8

Par exemple, nous avons :

- ▶ $\{1, 2\} \Delta \{6, 4\} = \{1, 2, 6, 4\}$;
- ▶ $\{6, 4\} \Delta \{1, 2\} = \{1, 2, 6, 4\}$;
- ▶ $\{1, 3, 4\} \Delta \{5, 1, 2\} = \{2, 3, 4, 5\}$;
- ▶ $\{5, 1, 2\} \Delta \{1, 3, 4\} = \{2, 3, 4, 5\}$;

Axiome 3 (Axiome de l'ensemble des parties).

La collection de toutes les parties de l'ensemble A est un ensemble.

Définition 10 – Ensemble des parties

L'ensemble de toutes les parties de l'ensemble A est noté $\mathcal{P}(A)$.

Exemple 9

Par exemple, nous avons :

$$\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}) = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset, \\ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \\ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \\ \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \\ \{1, 2, 3, 4\} \end{array} \right\}$$

Proposition 5

Soit S un ensemble fini avec n éléments. Alors $\mathcal{P}(S)$ est un ensemble fini avec 2^n éléments.

Démonstration.

Une partie est caractérisée par l'absence, ou la présence de chaque élément. Il y a donc 2^n possibilités. \square

Ensembles et éléments

Algèbre

Relations binaires

Relation d'équivalence

Relation d'ordre

Définition 11 – Couple

Nous appelons un couple la donnée de deux objets a et b . Nous notons un tel couple (a, b) . Nous appelons a la première coordonnée de (a, b) et b la seconde coordonnée.

Exemple 10

- ▶ $(1, 2)$
- ▶ $(\sqrt{2}, -12)$

Axiome 4.

Soit A et B deux ensembles. La collection des couples dont la première coordonnée est dans l'ensemble A et la deuxième coordonnée est dans l'ensemble B est un ensemble.

Définition 12 – produit cartésien

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

$$A^2 = A \times A$$

Exemple 11

- ▶ $(1, 2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- ▶ $(\sqrt{2}, -12) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$

Définition 13 – Relation binaire

Nous appelons relation binaire entre A et B toute partie de $A \times B$.

$$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow (a, b) \in \mathcal{R}$$

Ensembles et éléments

Algèbre

Relations binaires

Relation d'équivalence

Relation d'ordre

Relation d'équivalence

Définition 14 – Relation d'équivalence sur un ensemble

Soit A un ensemble et \mathcal{R} une relation binaire entre l'ensemble A et lui-même. Nous dirons que \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur l'ensemble A si et seulement si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

1. (réflexivité) pour tout élément $x \in A$, nous avons : $x\mathcal{R}x$;
2. (symétrie) pour toute paire d'éléments $(x, y) \in A^2$ telle que $x\mathcal{R}y$, nous avons : $y\mathcal{R}x$;
3. (transitivité) pour toute triplet d'éléments $x, y, z \in A$ tel que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, nous avons : $x\mathcal{R}z$.

Relation d'équivalence

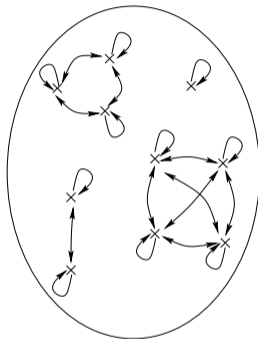


Figure 2 – Une relation d'équivalence

Relation d'équivalence

Exemple 12

Soit X un ensemble.

1. X^2 est la relation (grossière), telle que toute paire d'éléments est en relation, est une relation d'équivalence.
2. $\Delta_X := \{(x, x) \in X^2 \mid x \in X\}$, la relation (fine) telle qu'aucune paire d'éléments de X distincts n'est en relation, est une relation d'équivalence.

Relation d'équivalence

Exemple 13

Soit A un ensemble d'êtres humains.

1. La relation qui contient tous et uniquement les couples d'habitants qui sont nés dans la même ville, est une relation d'équivalence.
2. La relation qui contient tous et uniquement les couples d'habitants qui portent un vêtement (n'importe lequel) d'une même couleur, n'est pas une relation d'équivalence.

Relation d'équivalence

Exemple 14

La relation sur \mathbb{Z}

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a - b \text{ est un multiple de } 5$$

est une relation d'équivalence.

Démonstration.

Right now! Au tableau.



Relation d'équivalence

Exemple 15

La relation sur \mathbb{Z}

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a + b \text{ est pair}$$

est une relation d'équivalence.

Démonstration.

Right now ! Exercice.



Relation d'équivalence

Exemple 16

La relation sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow ad = cb$$

est une relation d'équivalence.

Démonstration.

Right now ! Exercice.



Relation d'équivalence

Définition 15 – Classe d'équivalence

Soit $x \in A$. L'ensemble

$$\{y \in A \mid x \mathcal{R} y\}$$

est appelée la classe d'équivalence de x et est notée \dot{x} ou $\text{cl}(x)$

Relation d'équivalence

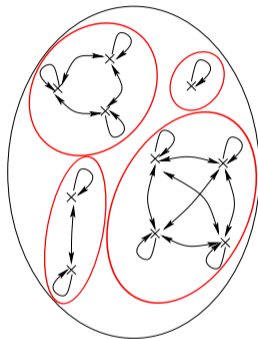


Figure 3 – Les classes d'équivalence

Relation d'équivalence

Proposition 6

Soit $x \in A$, on a

$$x \in \text{cl}(x)$$

Proposition 7

Soit $(x, y) \in A^2$. $x \mathcal{R} y$ si et seulement si $\text{cl}(x) = \text{cl}(y)$.

Corollaire 1

Soit $(x, y) \in A^2$. $x \mathcal{R} y$ si et seulement si $x \in \text{cl}(y)$.

Relation d'équivalence

Exemple 17

Soit \mathcal{R} la relation d'équivalence sur \mathbb{Z}

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a - b \text{ est un multiple de } 5$$

On a $\text{cl}(2) = \{2 + 5k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, 22, \dots\}$. Plus généralement $\text{cl}(n) = \{n + 5k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Démonstration.

Right now! Au tableau.



Relation d'équivalence

Exemple 18

Soit \mathcal{R} , la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow ad = cb$$

$$\text{cl}((a, b)) = \{(c, d) \mid c = \frac{a}{b}d\}$$

Démonstration.

Right now! Au tableau. □

Relation d'équivalence

Exemple 19

Soit \mathcal{R} , la relation sur \mathbb{R}

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow |a| = |b|$$

Prouver que c'est une relation d'équivalence. Soit $x \in \mathbb{R}$, déterminer $\text{cl}(x)$.

Démonstration.

Right now! Exercice.



Relation d'équivalence

Exemple 20

Soit \mathcal{R} , la relation d'équivalence sur \mathbb{Z}

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a + b \text{ est pair}$$

Démonstration.

Right now ! Exercice. □

Ensembles et éléments

Algèbre

Relations binaires

Relation d'équivalence

Relation d'ordre

Définition 16 – Ordre sur un ensemble

Soit A un ensemble et \mathcal{R} une relation binaire entre l'ensemble A et lui-même. Nous dirons que \mathcal{R} est une relation d'ordre sur l'ensemble A si et seulement si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

1. (réflexivité) pour tout élément $x \in A$, nous avons : $x\mathcal{R}x$;
2. (antisymétrique) pour toute paire d'éléments $(x, y) \in A^2$ telle que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, nous avons : $x = y$;
3. (transitivité) pour toute triplet d'éléments $x, y, z \in A$ tel que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, nous avons : $x\mathcal{R}z$.

Relation d'ordre

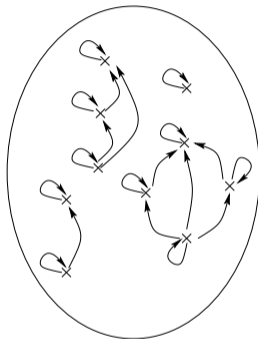


Figure 4 – Une relation d'équivalence

Exemple 21

Soit X un ensemble.

1. La relation X^2 qui contient toutes les paires éléments de X n'est pas une relation d'ordre, sauf si X possède au plus un élément.
2. Le relation $\Delta_X := \{(x, x) \in X^2 \mid x \in X\}$ qui contient ne contient aucune paire d'éléments de X distincts, est une relation d'ordre.
3. La relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(X)$ est une relation d'ordre.

Relation d'ordre

Remarque 1

Si \mathcal{R} est une relation d'ordre sur X et x et y deux éléments de X , on n'a pas forcément $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$.

Exemple 22

La relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ n'est pas totale : $\{1\} \not\subseteq \{2\}$ et $\{2\} \not\subseteq \{1\}$

Définition 17

Un ordre \mathcal{R} sur X est total si pour tout x et y dans X , on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$

Exemple 23

La relation \leq sur \mathbb{R} est totale.

Définition 18 – Ordre bien fondé

Soit E un ensemble et \mathcal{R} une relation d'ordre sur E . On dit que \mathcal{R} est bien fondé s'il n'existe pas de suite strictement décroissante (au sens de \mathcal{R}) d'éléments de E .

Exemple 24

La relation \leq sur \mathbb{N} est bien fondée.

Exemple 25

Soit E un ensemble fini. La relation \subseteq sur $\mathcal{P}(E)$ est bien fondée.

Définition 19 – Élément extrémal

Soit E un ensemble et \mathcal{R} une relation d'ordre sur E . Soit $F \subseteq E$ et $x \in F$.
On dit que x est un élément maximal de F si F ne contient pas d'élément plus grand que x .

On dit que x est un élément minimal de F si F ne contient pas d'élément plus petit que x .

Exemple 26

Soit $F = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{2\}, \{4\}\} \subseteq \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$.

$\{1\}$, $\{2\}$ et $\{4\}$ sont des éléments minimaux de F pour la relation d'inclusion.

$\{1, 2\}$ et $\{4\}$ sont des éléments maximaux de F pour la relation d'inclusion.

Proposition 8

Soit E un ensemble et \mathcal{R} une relation d'ordre sur E . \mathcal{R} est bien fondé si et seulement si toute partie non vide F de E admet un élément minimal.