Prédicats et récurrences

Marc CHEVALIER
DI ENS

21 septembre 2017

1 Quantificateurs

1.1 Définitions

Définition 1 – Prédicat

Un prédicat est formé à partir de prédicat atomique $P(x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n)$, des connecteurs logiques habituels, ainsi que des quantificateurs, que nous allons introduire par la suite.

Définition 2 – Quantificateur universel

Soit $P(x)$ un prédicat portant sur les éléments de E. Nous dirons que la propriété $(\forall x \in E, P(x))$ est vraie si et seulement si pour tout élément $x \in E$, $P(x)$ est vrai.

Définition 3 – Quantificateur existentiel

Soit $P(x)$ un prédicat portant sur les éléments de E. Nous dirons que la propriété $(\exists x \in E, P(x))$ est vraie si et seulement si il existe un élément $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vrai.

1.2 Preuves

Axiome 1 (Généralisation ou abstraction)**.**

Si nous pouvons prouver la propriété $P(t)$ pour $t \in E$ arbitraire (ie sans utiliser de propriété spécifique de t), alors nous pouvons en déduire la propriété $\forall x \in E, P(x)$.

Axiome 2 (Concrétisation)**.**

Si nous pouvons prouver une propriété $\forall x \in E, P(x)$, alors nous pouvons prouver $P(x)$ pour n'importe quel élément $x \in E$ de l'ensemble E.

Exemple 1

La propriété suivante :

$$(\forall x \in E, P(x)) \Rightarrow (\forall x \in E, (P(x) \vee P(x)))$$

est vraie.

Axiome 3 (Témoin (version 1))**.**

Si nous pouvons prouver la propriété $P(e)$ pour un élément $e \in E$ en particulier, alors nous pouvons en déduire la propriété $\exists x \in E, P(x)$.

Axiome 4 (Témoin (version 2))**.**

Si nous pouvons prouver la propriété $\exists x \in E, P(x)$, et si à partir d'un élément $t \in E$ générique nous pouvons prouver $P(t) \Rightarrow R$ sans utiliser de propriétés particulière de t, alors nous pouvons déduire R.

Exemple 2

La propriété suivante :

$$\exists x, P(x) \Rightarrow \exists x, P(x) \land P(x)$$

est vraie.

Remarque 1

Nous retiendrons que pour prouver une formule quantifiée universellement, il faut faire un raisonnement sur un élément générique qui n'utilise pas les propriétés spécifiques de l'élément. Alors que pour montrer une formule quantifiée existentiellement il nous suffit de construire un exemple.
Bien entendu, pour réfuter une propriété universelle, il nous suffit de construire un contre-exemple, alors que pour réfuter une propriété existentielle, il nous faut raisonner sur un élément générique et montrer que le prédicat est faux sur cet élément (sans utiliser les propriétés particulières de cet élément).

2 Schéma de récurrence

Théorème 1 – Principe de récurrence simple

Soit $P(n)$ un prédicat portant sur une variable n entière.
Si les propriétés $P(0)$ et si $[\forall n_0 \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)]$ sont vraies, alors la propriété $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

Théorème 2 – Principe de récurrence forte

Soit $P(n)$ un prédicat portant sur une variable n entière.
Si la propriété $\forall n_0, (\forall n \in [\![0, n_0 - 1]\!], P(n)) \Rightarrow P(n_0)$ est vraie, alors la propriété $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

Définition 4 – Suites

Une famille d'éléments indexés par l'ensemble $\mathbb{N}$ est appelé une suite. L'ensemble des suites de d'éléments de l'ensemble A est noté $A^{\mathbb{N}}$.

Théorème 3 – Définition par récurrence

Soit E un ensemble. Soit $e \in E$ un élément de E et $f \in E \to E$ une fonction de E dans E.
Alors il existe une et unique suite $g \in E^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{cases} g_0 = e \\ g_{n+1} = f(g_n), \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Exemple 3 – suite des itérées d'une fonction

Nous considérons $f : E \to E$ une fonction de E dans E. Nous appelons la suite des itérées de f la suite de fonction $(g_n) \in \left(E^E\right)^{\mathbb{N}}$ qui vérifie les condition suivantes :

$$\begin{cases} g_0 = Id_E, \\ g_{n+1} = f \circ g_n \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi notée $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.