Prédicats et récurrences

Marc Chevalier
marc.chevalier@ens.fr

DI ENS

18 septembre 2017

Quantificateurs

Schéma de récurrence

Quantificateurs

Définition 1 – Prédicat atomique

Une formule logique avec des variables libres.

Exemple 1

- $x + 2$ n'est pas un prédicat ;
- $1 = \pi$ est une proposition ;
- $x + 2 = 2 + x$ est un prédicat à une place sur $\mathbb{R}$ (on dit aussi d'arité 1, monadique ou unaire) ;
- $x + 2 = y$ est un prédicat à deux places (on dit aussi d'arité 2 ou binaire, ou encore relation binaire) ;

Quantificateurs

Définition 2 – Prédicat

Un prédicat est formé à partir de prédicat atomique $P(x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n)$, des connecteurs logiques habituels, ainsi que des quantificateurs, que nous allons introduire par la suite.

Quantificateurs

Exemple 2

Nous donnons maintenant quelques exemples de prédicats :

1. si E est l'ensemble des étudiants de la classe, la phrase :

   $$\text{« } x \in E \text{ porte un pull blanc. »}$$

   est un prédicat portant sur les éléments de E.
2. La formule :

   $$\text{« } n \in \mathbb{N} \text{ est un nombre premier. »}$$

   est un prédicat portant sur les entiers naturels.

Quantificateurs

Définition 3 – Quantificateur universel

Soit $P(x)$ un prédicat portant sur les éléments de E. Nous dirons que la propriété $(\forall x \in E, P(x))$ est vraie si et seulement si pour tout élément $x \in E$, $P(x)$ est vrai.

Quantificateurs

Définition 4 – Quantificateur existentiel

Soit $P(x)$ un prédicat portant sur les éléments de E. Nous dirons que la propriété $(\exists x \in E, P(x))$ est vraie si et seulement si il existe un élément $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vrai.

Quantificateurs

Exemple 3

Soit X l'ensemble de tous les chats qui existent, ont existé, et existeront un jour. La propriété $\forall x \in X, x$ est gris est faux car il existe des chats qui ne sont pas gris.

Quantificateurs

Exemple 4

La propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Q}$$

est vraie, car tout entier naturel est un nombre rationnel.

Exemple 5

La propriété suivante :

$$\forall q \in \mathbb{Q}, q \in \mathbb{N}$$

est fausse car $\frac{1}{2}$ est un nombre rationnel qui n'est pas un nombre entier.

Quantificateurs

Exemple 6

Soit $P(x)$ un prédicat portant sur les éléments de E. La proposition

$$(\forall x \in E, P(x)) \Rightarrow (\exists y \in E, P(y))$$

est satisfaite si et seulement si l'ensemble E n'est pas vide.

Quantificateurs

Proposition 1

Soit P un prédicat portant sur les éléments de l'ensemble vide. Alors la propriété :

$$\forall x \in \emptyset, P(x).$$

est satisfaite.

Quantificateurs

Proposition 2

Soit P un prédicat portant sur les éléments de l'ensemble vide. Alors la propriété :

$$\exists x \in \emptyset, P(x).$$

est fausse.

Quantificateurs

Proposition 3

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $(\forall x \in X, P(x))$;
- $(\neg(\exists x \in X, (\neg P(x))))$.

Quantificateurs

Proposition 4

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $(\exists x \in X, P(x))$;
- $(\neg(\forall x \in X, (\neg(P(x)))))$.

Quantificateurs

Axiome 1 (Généralisation ou abstraction)**.**

Si nous pouvons prouver la propriété $P(t)$ pour $t \in E$ arbitraire (ie sans utiliser de propriété spécifique de t), alors nous pouvons en déduire la propriété $\forall x \in E, P(x)$.

Quantificateurs

Axiome 2 (Concrétisation)**.**

Si nous pouvons prouver une propriété $\forall x \in E, P(x)$, alors nous pouvons prouver $P(x)$ pour n'importe quel élément $x \in E$ de l'ensemble E.

Quantificateurs

Axiome 3 (Témoin)**.**

Si nous pouvons prouver la propriété $P(e)$ pour un élément $e \in E$ en particulier, alors nous pouvons en déduire la propriété $\exists x \in E, P(x)$.

Quantificateurs

Schéma de récurrence

Schéma de récurrence

Théorème 1 – Principe de récurrence simple

Soit $P(n)$ un prédicat portant sur une variable n entière.
Si les propriétés $P(0)$ et si $[\forall n_0 \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)]$ sont vraies, alors la propriété $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

Schéma de récurrence

Exemple 7

La somme des n premiers entiers est $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Schéma de récurrence

Théorème 2 – Principe de récurrence forte

Soit $P(n)$ un prédicat portant sur une variable n entière.
Si la propriété $\forall n_0, \left(\forall n \in [\![0, n_0 - 1]\!], P(n)\right) \Rightarrow P\left(n_0\right)$ est vraie.

Schéma de récurrence

Exemple 8

Tout nombre supérieur à 2 possède un diviseur premier supérieur à 2.

Schéma de récurrence

Définition 5 – Suites

Une famille d'éléments indexés par l'ensemble $\mathbb{N}$ est appelé une suite. L'ensemble des suites de d'éléments de l'ensemble A est noté $A^{\mathbb{N}}$.

Schéma de récurrence

Théorème 3 – Définition par récurrence

Soit E un ensemble. Soit $e \in E$ un élément de E et $f \in E \to E$ une fonction de E dans E.
Alors il existe une et unique suite $g \in E^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{cases} g_0 = e \\ g_{n+1} = f(g_n), \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Schéma de récurrence

Exemple 9 – Suite arithmético-géométrique

Nous appelons la suite arithmético-géométrique de paramètres i, a, et b la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = i, \\ u_{n+1} = a \cdot u_n + b, \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Lorsque $a = 1$, nous pouvons montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = i + n \cdot b$$

Sinon, nous pouvons montrer que,

$$u_n = a^n \cdot \left(i - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}.$$