Fonctions

Marc CHEVALIER
DI ENS

21 septembre 2017

1 Fonctions

1.1 Généralités

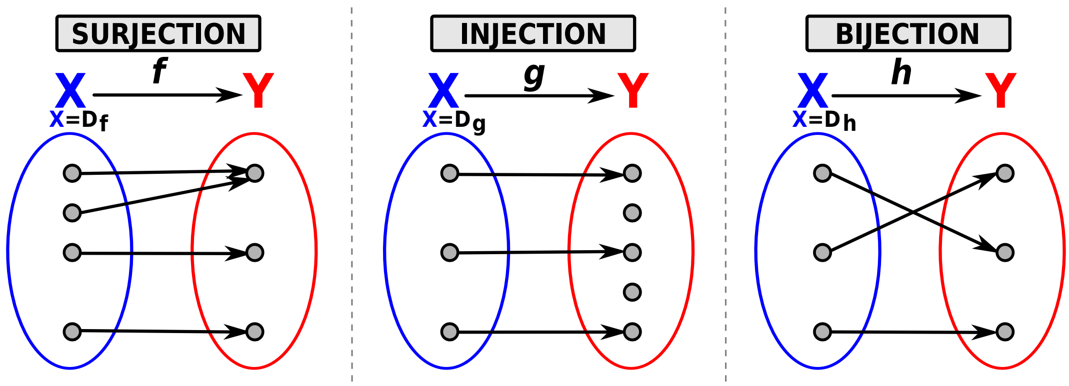

FIGURE 1 – Des propriétés sur les fonctions

Les fonctions associent à chaque élément d'un ensemble un unique élément d'un autre ensemble. Les fonctions peuvent être vu comme un cas particulier des relations binaires.

Définition 1 – Relation fonctionnelle

Nous disons qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ entre un ensemble A et un ensemble B est une relation fonctionnelle, si et seulement si :

1. pour tout élément $a \in A$ dans l'ensemble A, il existe un élément $b \in B$ dans l'ensemble B, tel que $a\mathcal{R}b$.
2. pour tout élément $a \in A$, pour tout élément $b, b' \in B$, $a\mathcal{R}b$ et $a\mathcal{R}b'$ alors $b = b'$.

Nous pouvons maintenant définir les fonctions comme une relation fonctionnelle entre deux ensembles :

Définition 2 – Fonctions

Une fonction est une paire $(A, B, \mathcal{R})$ tel que A et B soient deux ensembles et $\mathcal{R}$ est une relation fonctionnelle entre A et B.
Nous appelons l'ensemble A le domaine de définition de la fonction $(A, B, \mathcal{R})$, l'ensemble B le codomaine de la fonction $(A, B, \mathcal{R})$, et la relation binaire $\mathcal{R}$ le graphe de la fonction $(A, B, \mathcal{R})$.

Proposition 1

Soit A et B deux ensembles, la collection des fonctions entre l'ensemble A et l'ensemble B est un ensemble. Nous notons cet ensemble B^A.

Démonstration. L'ensemble des graphes des fonctions entre A et B est une partie du produit Cartésien entre A et B. Puis, l'ensemble des fonctions de A vers B est le produit Cartésien entre $\{A\}$, $\{B\}$, et l'ensemble des graphes de fonctions entre A et B. $\square$

Notation 1

Lorsque $f := ((A, B), \mathcal{R})$ est une fonction, nous notons $b = f(a)$ pour dire que l'élément a de l'ensemble A et l'élément b de l'ensemble B sont en relation (pour $\mathcal{R}$).

Notation 2

Une fonction f entre l'ensemble A et l'ensemble B peut être noté de la manière suivante :

$$f : \begin{cases} A & \to & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$$

Définition 3 – Identité

Soit A un ensemble. La fonction suivante :

$$\begin{cases} A & \to & A \\ a & \mapsto & a. \end{cases}$$

est bien définie. Nous notons cette fonction Id_A.

Proposition 2

Soit A un ensemble. Le graphe de la fonction Id_A est la relation $\Delta_A := \{(a,a) \mid a \in A\}$.

Exemple 1

Nous donnons d'autres exemples de fonctions.

— La fonction de l'ensemble $\{\bot, \top\}$ qui à $\bot$ associe $\top$, et réciproquement se note de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \{\bot, \top\} & \to & \{\bot, \top\} \\ \bot & \mapsto & \top \\ \top & \mapsto & \bot \end{array} \right.$$

— La fonction de l'ensemble des entiers dans lui-même, qui à tout entier associe son successeur se note de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1. \end{array} \right.$$

Définition 4 – Égalité

Deux fonctions $f := (A, B, \mathcal{R})$ et $f' := (A', B', \mathcal{R}')$ sont égales si et seulement si les ensembles A et A' sont égaux, les ensembles B et B' sont égaux, et les ensemble $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont égaux.

Proposition 3

Deux fonctions $f := (A, B, \mathcal{R})$ et $f' := (A', B', \mathcal{R}')$ sont égales si et seulement si les ensembles A et A' sont égaux, les ensembles B et B' sont égaux, et pour tout élément de A, nous avons $f(a) = f'(a)$.

Remarque 1

Deux fonctions différentes peuvent avoir le même graphe. Par exemple, les deux fonctions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right. \quad et \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right.$$

Définition 5 – Composition

Soient A, B, et C trois ensembles et soient f une fonction entre l'ensemble A et l'ensemble B et g une fonction entre l'ensemble B et l'ensemble C.
Alors la fonction :

$$\begin{cases} A & \to & C \\ a & \mapsto & g(f(a)) \end{cases}$$

est bien définie. Nous notons cette fonction $g \circ f$.

1.2 Bijections

Soient A et B deux ensembles. Soit f une fonction entre l'ensemble A et l'ensemble B.

Définition 6 – Injection

Nous disons que f est une injection si et seulement si pour toute paire d'éléments $a, a' \in A$, on ait : $f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$.

Exemple 2

- La fonction identité sur A est injective.
- La fonction de l'ensemble des individus dans les entiers, qui a chaque individu associe son âge, n'est pas injective.
- La fonction de l'ensemble des individus immatriculés à la sécurité sociale, qui a chaque individu son numéro de sécurité sociale est injective.

Définition 7 – Surjection

Nous disons que f est une surjection si et seulement si pour tout élément $b \in B$ de l'ensemble B, il existe un élément $a \in A$ tel que $f(a) = b$.

Exemple 3

- Si A est un ensemble, la fonction identité sur A est surjective.
- La fonction de l'ensemble des entiers relatifs dans lui-même, qui à chaque entier associe son successeur est surjective.
- La fonction de l'ensemble des entiers naturels dans lui-même, qui à chaque entier associe son prédécesseur n'est pas surjective.

Définition 8 – Bijection

Une fonction qui est à la fois injective et surjective est une bijection.

Proposition 4

La fonction f est bijective si et seulement si, pour tout élément $b \in B$ de l'ensemble B, il existe un unique élément $a \in A$ de l'ensemble A tel que $b = f(a)$.

Proposition 5

Notons $f := (A, B, \mathcal{R})$ et supposons que f est une bijection. Alors le triplet $(B, A, \mathcal{S})$, où la relation $\mathcal{S}$ entre B et A est définie par :

$$b\mathcal{S}a :\Leftrightarrow a\mathcal{R}b$$

est une fonction bijective entre l'ensemble B et l'ensemble A.
Nous appelons cette fonction l'inverse de f, et la notons f^{-1}.

Proposition 6

Les deux propriétés suivantes sont vérifiées :
- $(f^{-1} \circ f) = Id_A$;
- $(f \circ f^{-1}) = Id_B$.

Proposition 7

Soit g une fonction de l'ensemble B dans l'ensemble A.
Si $g \circ f = Id_A$ et $f \circ g = Id_B$, alors f est bijective et son inverse est g.