Examen de mathématiques

1 Logique propositionnelle

Soit ψ la formule $\Big((A \vee (\neg B)) \Rightarrow B\Big)$.

1. Écrire la table de vérité de ψ.

Solution:

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	$[(\neg B)]_\sigma$	$\Big[(A \vee (\neg B))\Big]_\sigma$	$[\psi]_\sigma$
ff	ff	tt	tt	ff
ff	tt	ff	ff	tt
tt	ff	tt	tt	ff
tt	tt	ff	tt	tt

2. ψ est-elle une tautologie ?

Solution: Non : l'environnement

$$\begin{aligned} A &\mapsto ff \\ B &\mapsto ff \end{aligned}$$

rend la formule fausse.

3. ψ est-elle une contradiction ?

Solution: Non : l'environnement

$$\begin{aligned} A &\mapsto ff \\ B &\mapsto tt \end{aligned}$$

rend la formule vraie.

2 Récurrence

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x}{x+1} \end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } n = 1 \\ f \circ f^{(n-1)}(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que le prédicat P_n : « $\forall x \in \mathbb{R}^+, f^{(n)}(x) = \frac{x}{nx+1}$ » est vrai sur $\mathbb{N}^*$.

Solution: Prouvons P_n par récurrence sur $\mathbb{N}^*$.

- Initialisation. Pour $n = 1$. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a bien $f^{(1)}(x) = f(x) = \frac{x}{x+1}$. D'où P_1.
- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que P_n est vrai. Prouvons P_{n+1}. On a donc $\forall x \in \mathbb{R}^+, f^{(n)}(x) = \frac{x}{nx+1}$. Comme $x \geqslant 0$, $f^{(n)}(x) \geqslant 0$. f est définie sur $\mathbb{R}^+$. Donc $f \circ f^{(n)}$ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$.
  Soit $x \in \mathbb{R}^+$
  $$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= f \circ f^{(n)}(x) \\ &= \frac{\frac{x}{nx+1}}{\frac{x}{nx+1} + 1} \\ &= \frac{\frac{x}{nx+1}}{\frac{x+nx+1}{nx+1}} \\ &= \frac{x}{(n+1)x+1} \end{aligned}$$
  D'où P_{n+1}

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n$.

3 Relations

Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}^2$ par

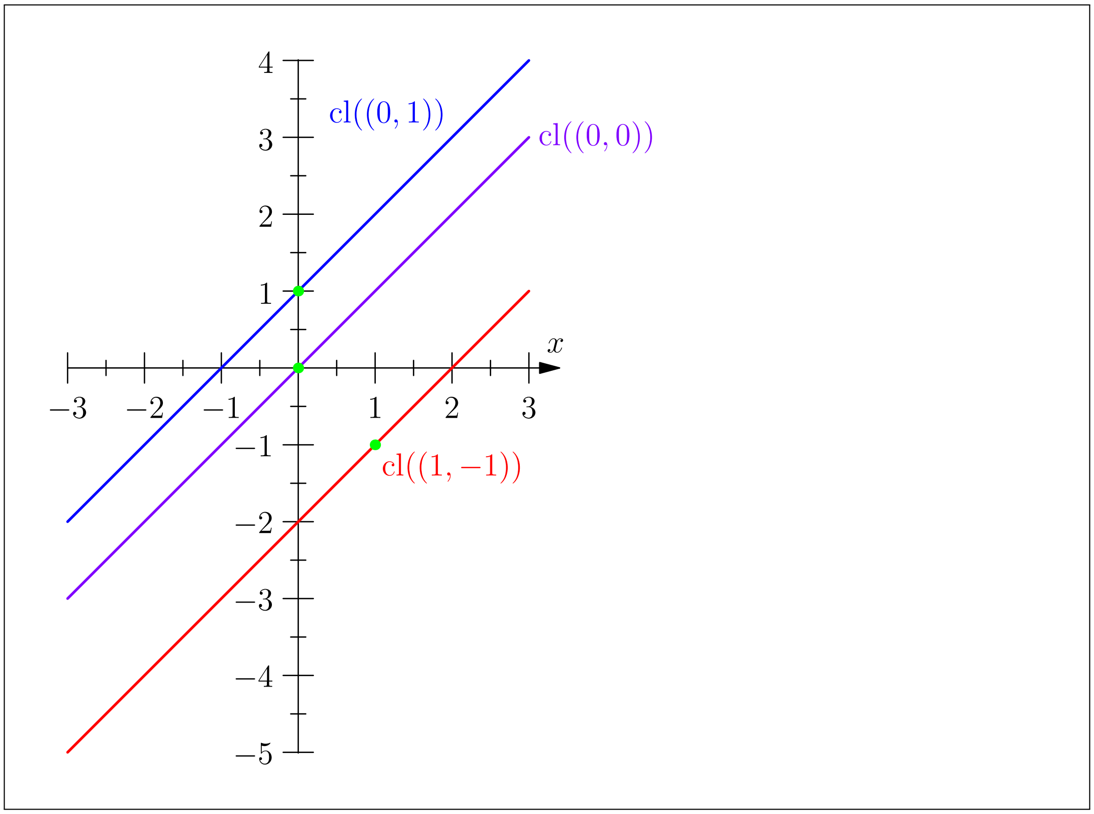
$$(a, b) \,\mathcal{R}\, (c, d) \text{ ssi } a + d = c + b$$

1. Prouver que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$.

Solution:
- Réflexivité. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a $x+y = y+x$. Donc $(x,y) \mathcal{R} (x,y)$.
- Symétrie. Soit $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$. On suppose $(x,y) \mathcal{R} (x',y')$. On a donc $x+y' = x'+y$, donc $x'+y = y'+x$. Donc $(x',y') \mathcal{R} (x,y)$.
- Transitivité. Soit $(x,y),(x',y'),(x'',y'') \in \mathbb{R}^2$. On suppose $(x,y) \mathcal{R} (x',y')$ et $(x',y') \mathcal{R} (x'',y'')$. On a donc $x+y' = y+x'$ et $x'+y'' = y'+x''$. En sommant membre à membre : $x+y'+x'+y'' = y+x'+y'+x''$, donc $x+y'' = y+x''$. Donc $(x,y) \mathcal{R} (x'',y'')$.

2. Déterminer les classes d'équivalence de $(0,1)$, $(0,0)$ et $(1,-1)$. Dessiner ces ensembles dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Solution:
- Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On suppose $(x,y) \mathcal{R} (0,1)$. On a donc $x+1 = y+0$. C'est donc l'ensemble $\mathrm{cl}\big((0,1)\big) = \big\{(x,x+1) \bigm| x \in \mathbb{R}\big\}$.
- Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On suppose $(x,y) \mathcal{R} (0,0)$. On a donc $x+0 = y+0$. C'est donc l'ensemble $\mathrm{cl}\big((0,0)\big) = \big\{(x,x) \bigm| x \in \mathbb{R}\big\}$.
- Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On suppose $(x,y) \mathcal{R} (1,-1)$. On a donc $x-1 = y+1$. C'est donc l'ensemble $\mathrm{cl}\big((1,-1)\big) = \big\{(x,x-2) \bigm| x \in \mathbb{R}\big\}$.



4 Fonctions

1. Soit $c \in \mathbb{R}$. Résoudre en X sur $\mathbb{R}^{+*}$ l'équation

$$X^2 - 2cX - 1 = 0$$

Solution: $\Delta = 4c^2 + 4 > 0$. On a donc deux solutions :

$$X_1 = c - \sqrt{c^2+1} \text{ et } X_2 = c + \sqrt{c^2+1}$$

Cependant, $|c| < \sqrt{c^2+1}$. Donc $X_1 < 0$ et $X_2 > 0$. La seule solution est donc

$$X_2 = c + \sqrt{c^2+1}$$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation de paramètre $c \in \mathbb{R}$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = c$$

On pourra poser $X = e^x$.

Solution: En posant $X = e^x$, on a $X > 0$ et l'équation devient

$$\begin{aligned} \frac{X - \frac{1}{X}}{2} = c &\Leftrightarrow \frac{\frac{X^2-1}{X}}{2} = c \\ &\Leftrightarrow \frac{X^2 - 1}{2X} = c \\ &\Leftrightarrow X^2 - 1 = 2Xc \\ &\Leftrightarrow X^2 - 2Xc - 1 = 0 \end{aligned}$$

En se ramenant à la question précédente, on trouve $X = c + \sqrt{c^2+1}$ d'où $x = \ln\left(c + \sqrt{c^2+1}\right)$, ce qui est toujours défini comme $X > 0$.

3. La fonction sinus hyperbolique définie par

$$\begin{aligned} \sinh : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

est elle injective, surjective et/ou bijective ?

Solution: Comme l'équation $\sinh(x) = c$ a une solution pour tout $c \in \mathbb{R}$, sinh est surjective.
De plus, il y a exactement une seule solution, sinh est injective.
sinh est donc bijective.