

Examen de mathématiques

1 Logique propositionnelle

Soit ψ la formule $((A \vee (\neg B)) \Rightarrow B)$.

1. Écrire la table de vérité de ψ .
2. ψ est-elle une tautologie?
3. ψ est-elle une contradiction?

2 Récurrence

Soit

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x}{x+1}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } n = 1 \\ f \circ f^{(n-1)}(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que le prédicat $P_n : \ll \forall x \in \mathbb{R}^+, f^{(n)}(x) = \frac{x}{nx+1} \gg$ est vrai sur \mathbb{N}^* .

3 Relations

Soit \mathfrak{R} la relation définie sur \mathbb{R}^2 par

$$(a, b) \mathfrak{R} (c, d) \text{ ssi } a + d = c + b$$

1. Prouver que \mathfrak{R} est une relation d'équivalence sur \mathbb{R}^2 .
2. Déterminer les classes d'équivalence de $(0, 1)$, $(0, 0)$ et $(1, -1)$. Dessiner ces ensembles dans le plan \mathbb{R}^2 .

4 Fonctions

1. Soit $c \in \mathbb{R}$. Résoudre en X sur \mathbb{R}^{+*} l'équation

$$X^2 - 2cX - 1 = 0$$

2. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation de paramètre $c \in \mathbb{R}$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = c$$

On pourra poser $X = e^x$.

3. La fonction sinus hyperbolique définie par

$$\begin{aligned} \sinh : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

est elle injective, surjective et/ou bijective ?