Test de calcul propositionnel et théorie des ensembles

Exercice 1 : Logique propositionnelle

1. Parmi les tables de vérité en figure 1, laquelle (lesquelles) est (sont) celle(s) de l'implication $(A \Rightarrow B)$.

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	
ff	ff	tt
ff	tt	ff
tt	ff	ff
tt	tt	tt

(a)

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	
ff	ff	tt
ff	tt	tt
tt	ff	tt
tt	tt	ff

(b)

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	
ff	ff	ff
ff	tt	tt
tt	ff	tt
tt	tt	tt

(c)

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	
ff	ff	tt
ff	tt	tt
tt	ff	ff
tt	tt	tt

(d)

FIGURE 1 – Tables de vérité

Solution : La réponse (d).

2. Écrire la table de vérité de la formule

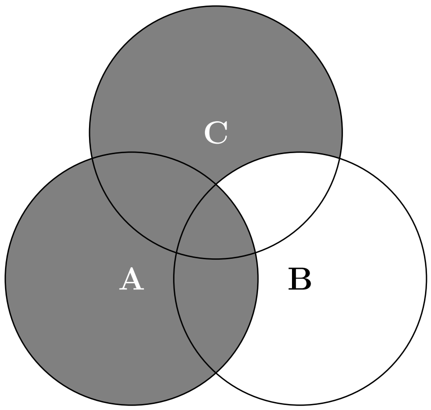
$$\big(\neg(A \wedge B)\big)$$

Solution :

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	$[(A \wedge B)]_\sigma$	$\Big[\big(\neg(A \wedge B)\big)\Big]_\sigma$
ff	ff	ff	tt
ff	tt	ff	tt
tt	ff	ff	tt
tt	tt	tt	ff

Exercice 2 : Ensembles

1. Exprimer les ensembles colorés en gris sur la figure 2 en fonction de A, B et C en utilisant les connecteurs $\cup$, $\cap$, $\setminus$ et Δ.



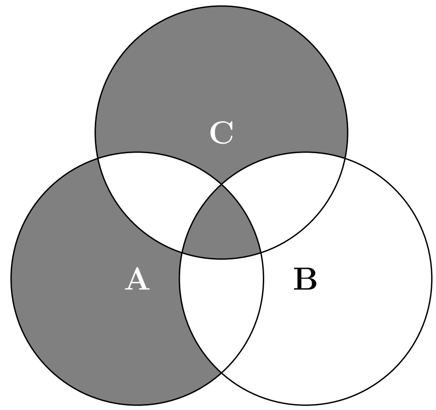


FIGURE 2 – Des ensembles

Solution : Il y a une infinité de solutions, dont plusieurs solutions simples. Mais de bonnes solutions sont :

— Pour le premier, $A \cup (C \setminus B)$

— Pour le second $(A \setminus (B \cup C)) \cup (C \setminus (A \cup B)) \cup (A \cap B \cap C)$ ou $((A \Delta C) \setminus B) \cup (A \cap B \cap B)$

2. Dessiner les diagrammes de VENN (diagramme patates) de

— $A \Delta B$

— $(A \cup B) \setminus (A \cap B \cap C)$

Solution :

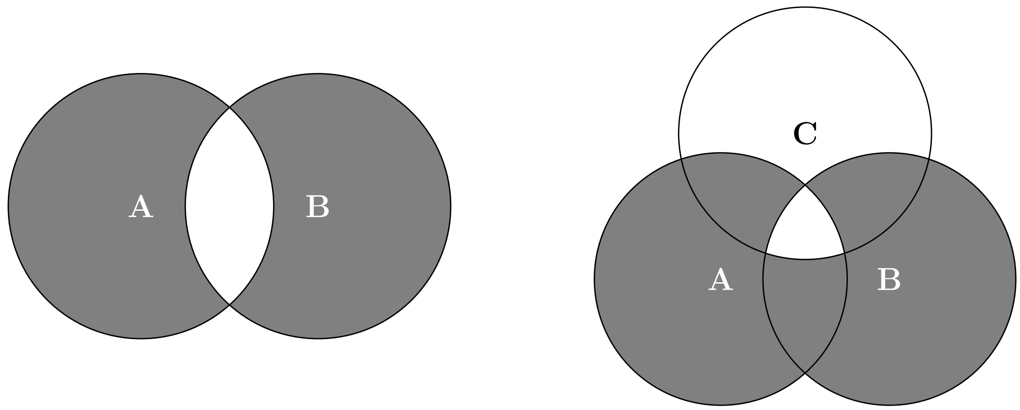


FIGURE 3 – Solution

Exercice 3 : Récurrence

1. Soit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$S_1 = \frac{1}{2}$$
$$S_n = S_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)} \text{ pour } n > 1$$

   Prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Solution : Soit P_n le prédicat $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ sur $\mathbb{N}^*$. Prouvons P_n par récurrence sur n.

— Initialisation : Pour $n = 1$; on a $S_1 = \frac{1}{2}$ et $1 - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. P_1 est donc vrai.

— Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose P_n, prouvons P_{n+1}.

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
S_{n+1} &= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
S_{n+1} &= 1 - \frac{n+2}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
S_{n+1} &= 1 + \frac{1-(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\
S_{n+1} &= 1 + \frac{-(n+1)}{(n+1)(n+2)} \\
S_{n+1} &= 1 - \frac{1}{(n+2)}
\end{aligned}$$

D'où P_{n+1}.

P_1 est vrai et $\forall n \in \mathbb{N}*, P_n \Rightarrow P_{n+1}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}*$, P_n est vrai ($\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n$).