DM d'algèbre linéaire

Rendez les exercices dans l'ordre ou chacun sur une feuille séparée (pas tous ensemble en vrac). Ne perdez pas de temps sur les bonus : ce sont des questions intéressantes, mais parfois plus difficiles.

Le barème est indicatif. Il n'est pas nécessaire de tout faire pour obtenir une bonne note. Comme le DM est assez long, la notation sera probablement non linéaire.

À rendre en groupe de 1 à 2. 2 si possible !

Ne vous retenez pas de le faire en LaTeX si vous le sentez. Vous gagnerez le bonus de l'indulgence du correcteur.

À chaque fois que vous faites une preuve ressemblante à une déjà faite, vous pouvez aller plus vite.

Exercice 1 : Espaces et sous espaces vectoriels et morphismes

1. Montrer que l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition et la multiplication par un réel, est un espace vectoriel. On le notera E.
2. Montrer que l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de E. On le notera P.
3. Montrer que l'ensemble des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de E. On le notera I.
4. Soit $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique paire $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ telle que $a + b = f(x)$ et $a - b = f(-x)$. En déduire qu'il existe une unique paire $(p, i) \in P \times I$ telle que $p + i = f$. On dit que P et I sont supplémentaires.
5. On note π_P (resp. π_I) la fonction qui à f associe p (resp. i) tel que défini ci-dessus. Montrer que π_P et π_I sont linéaires. Trouver leurs noyaux et images.
6. Déterminer $\pi_P \circ \pi_P$, $\pi_I \circ \pi_I$, $\pi_I \circ \pi_P$ et $\pi_P \circ \pi_I$.

Exercice 2 : Familles de vecteurs (15 points)

1. Soit P et Q des polynômes à coefficient complexes (en toute généralité). Montrer que si $\deg(P + Q) < \max(\deg P, \deg Q)$, alors $\deg P = \deg Q$. Montrer aussi que si $\deg P \neq \deg Q$, alors $\deg(P + Q) = \max(\deg P, \deg Q)$.

On choisit $n \in \mathbb{N}$. On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$, des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.

2. Rappeler la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ et sa base canonique.

   Soit $k \in \mathbb{N}$. On appelle famille de polynômes échelonnée en degré une famille $(P_i)_{i\in[\![0,k]\!]}$ telle que $\forall i \in [\![0, k-1]\!], \deg P_i < \deg P_{i+1}$.
3. Soit $(P_i)_{i\in[\![0,k]\!]}$ et une famille échelonnée de polynômes et $(a_i)_{i\in[\![0,k]\!]}$ une famille de réels. En supposant $a_k \neq 0$, quel est le degré et le coefficient dominant de $S = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i P_i$. En déduire que $S \neq 0$.
4. En déduire que la famille $(P_i)_{i\in[\![0,k]\!]}$ est libre.
5. On prend $(P_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une famille échelonnée de $n+1$ polynômes. Montrer que $(P_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

   On définit la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes par

$$T_0 = 1$$
$$T_1 = X$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

6. Pour tout n naturel, quel est le degré de T_n ?
7. Montrer que pour tout entier naturel n, la famille $(T_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 3 : Réduction (15 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente s'il existe k tel que $A^k = 0$. On note $\nu(A)$ le plus petit k qui vérifie cette égalité.

1. Trouver les matrices diagonales et nilpotentes.
2. Déduire l'ensemble des matrices diagonalisable et nilpotente.
3. Soit A une matrice quelconque. Supposons que A admette un vecteur propre x pour la valeur propre λ. Montrer que x est vecteur propre de A^k pour tout k. Quelle est la valeur propre associée ?
4. En déduire le spectre d'une matrice nilpotente.
5. On rappelle que dans $\mathbb{C}$, le polynôme caractéristique d'une matrice est scindé et que l'ensemble des racines forment le spectre. Déterminer le polynôme caractéristique d'une matrice nilpotente de taille n.