DM d'algèbre linéaire

Rendez les exercices dans l'ordre ou chacun sur une feuille séparée (pas tous ensemble en vrac). Ne perdez pas de temps sur les bonus : ce sont des questions intéressantes, mais parfois plus difficiles.

Le barème est indicatif. Il n'est pas nécessaire de tout faire pour obtenir une bonne note. Comme le DM est assez long, la notation sera probablement non linéaire.

À rendre en groupe de 1 à 2. 2 si possible !

Ne vous retenez pas de le faire en LaTeX si vous le sentez. Vous gagnerez le bonus de l'indulgence du correcteur.

À chaque fois que vous faites une preuve ressemblante à une déjà faite, vous pouvez aller plus vite.

Exercice 1 : Projections et symétries

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est une projection (ou un projecteur) si $\forall x \in E, f \circ f(x) = f(x)$. On dit que f est idempotent. On peut aussi noter $f \circ f = f$ ou encore $f^2 = f$.

On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie si $\forall x \in E, f \circ f(x) = x$. On dit que s est involutive. On peut aussi noter $f^2 = Id$.

1. Soit $\pi \in \mathcal{L}(E)$ une projection.
   (a) Montrer que $\forall x \in E, x \in \mathrm{Im}\,(\pi) \Leftrightarrow \pi(x) = x$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(\pi) \cap \mathrm{Im}\,(\pi) = \{0\}$.
   (c) On pose $\rho = Id - \pi$. Montrer que ρ est une projection. (On dit que π et ρ sont des projecteurs associés.)
   (d) Montrer que $\mathrm{Im}\,(\pi) = \mathrm{Ker}\,(\rho)$.
   (e) Montrer que $\mathrm{Im}\,(\rho) = \mathrm{Ker}\,(\pi)$.
   (f) Montrer que $\pi + \rho = Id$.
   (g) Calculer $\pi \circ \rho$ et $\rho \circ \pi$.
2. (a) On pose $s = 2\pi - Id$. Montrer que s est une symétrie. On dit que c'est la symétrie associée à π.
   (b) Montrer $\mathrm{Ker}\,(s) = \{0\}$.

    (c) En déduire que $\text{Im}\,(s) = E$.

3. On prend $E = \mathbb{C}$. Et on pose $p : z \mapsto \Re(z)$, la fonction qui associe à chaque complexe sa partie réelle.
    (a) Montrer que p est une projection.
    (b) Trouver la projection associée.
    (c) Trouver la symétrie associée à p.

Exercice 2 : Réduction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente s'il existe k tel que $A^k = 0$. On note $\nu(A)$ le plus petit k qui vérifie cette égalité.

1. Trouver les matrices diagonales et nilpotentes.
2. Déduire l'ensemble des matrices diagonalisable et nilpotente.
3. Soit A une matrice quelconque. Supposons que A admette un vecteur propre x pour la valeur propre λ. Montrer que x est vecteur propre de A^k pour tout k. Quelle est la valeur propre associée ?
4. En déduire le spectre d'une matrice nilpotente.
5. On rappelle que dans $\mathbb{C}$, le polynôme caractéristique d'une matrice est scindé et que l'ensemble des racines forment le spectre. Déterminer le polynôme caractéristique d'une matrice nilpotente de taille n.