DM d'algèbre linéaire

Rendez les exercices dans l'ordre ou chacun sur une feuille séparée (pas tous ensemble en vrac). Ne perdez pas de temps sur les bonus : ce sont des questions intéressantes, mais parfois plus difficiles.

Le barème est indicatif. Il n'est pas nécessaire de tout faire pour obtenir une bonne note. Comme le DM est assez long, la notation sera probablement non linéaire.

À rendre en groupe de 1 à 2. 2 si possible !

Ne vous retenez pas de le faire en LaTeX si vous le sentez. Vous gagnerez le bonus de l'indulgence du correcteur.

À chaque fois que vous faites une preuve ressemblante à une déjà faite, vous pouvez aller plus vite.

Exercice 1 : Projections et symétries

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est une projection (ou un projecteur) si $\forall x \in E, f \circ f(x) = f(x)$. On dit que f est idempotent. On peut aussi noter $f \circ f = f$ ou encore $f^2 = f$.

On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie si $\forall x \in E, f \circ f(x) = x$. On dit que s est involutive. On peut aussi noter $f^2 = Id$.

1. Soit $\pi \in \mathcal{L}(E)$ une projection.
   (a) Montrer que $\forall x \in E, x \in \text{Im}\,(\pi) \Leftrightarrow \pi(x) = x$.

   > **Solution:**
   > — Soit $x \in \text{Im}\,(\pi)$. Il existe donc $a \in E$ tel que $\pi(a) = x$. On a donc $\pi(\pi(a)) = \pi(x)$, en appliquant π de chaque côté. On a donc $\pi(a) = \pi(x)$. Or $\pi(a) = x$, donc $\pi(x) = x$.
   > — Soit x tel que $\pi(x) = x$. On a donc bien $x \in \text{Im}\,(x)$.

   (b) Montrer que $\text{Ker}\,(\pi) \cap \text{Im}\,(\pi) = \{0\}$.

   > **Solution:**
   > — On a trivialement $0 \in \text{Ker}\,(\pi) \cap \text{Im}\,(\pi)$ puisque $\pi(0) = 0$, donc 0 est à la fois dans l'image et dans le noyau de π.

— Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(\pi) \cap \mathrm{Im}\,(\pi)$. On sait d'après la question précédente que $x = \pi(x)$ puisque $x \in \mathrm{Im}\,(\pi)$. Or, $x \in \mathrm{Ker}\,(\pi)$. Donc $\pi(x) = 0$, donc $x = 0$.

(c) On pose $\rho = Id - \pi$. Montrer que ρ est une projection. (On dit que π et ρ sont des projecteurs associés.)

Solution: Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}
\rho \circ \rho(x) &= (Id - \pi) \circ (Id - \pi)(x) \\
&= (Id - \pi)(x - \pi(x)) \\
&= (Id - \pi)(x) - (Id - \pi)(\pi(x)) \\
&= x - \pi(x) - \pi(x) + \pi(\pi(x)) \\
&= x - 2\pi(x) + \pi(x) \\
&= x - \pi(x) \\
&= \rho(x)
\end{aligned}$$

(d) Montrer que $\mathrm{Im}\,(\pi) = \mathrm{Ker}\,(\rho)$.

Solution:
— Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(\rho)$. On a donc $\rho(x) = 0$, c'est à dire $x - \pi(x) = 0$, donc $\pi(x) = x$, donc $x \in \mathrm{Im}\,(\pi)$.
— Soit $x \in \mathrm{Im}\,(\pi)$. On a donc $\pi(x) = x$ donc $\rho(x) = 0$, donc $x \in \mathrm{Ker}\,(\rho)$.

(e) Montrer que $\mathrm{Im}\,(\rho) = \mathrm{Ker}\,(\pi)$.

Solution: On peut remarquer que comme $\rho = Id - \pi$, on a $\pi = Id - \rho$. Comme ρ est aussi un projecteur, on a la relation désirée par symétrie avec la propriété précédente.

(f) Montrer que $\pi + \rho = Id$.

Solution: On a $\rho = Id - \pi$, donc $\pi + \rho = Id$...

(g) Calculer $\pi \circ \rho$ et $\rho \circ \pi$.

Solution:
- Soit $x \in E$. $\pi(\rho(x)) = \pi(x - \pi(x)) = \pi(x) - \pi(\pi(x)) = \pi(x) - \pi(x) = 0$
- Soit $x \in E$. $\rho(\pi(x)) = (Id - \pi)(\pi(x)) = \pi(x) - \pi(\pi(x)) = \pi(x) - \pi(x) = 0$.

2. (a) On pose $s = 2\pi - Id$. Montrer que s est une symétrie. On dit que c'est la symétrie associée à π.

Solution: Soit $x \in E$. On a $s \circ s(x) = (2\pi - Id)(2\pi - Id)(x) = (2\pi - Id)(2\pi(x) - x) = 4\pi(\pi(x)) - 2\pi(x) - 2\pi(x) + x = x$.

(b) Montrer $\text{Ker}\,(s) = \{0\}$.

Solution: Soit $x \in \text{Ker}\,(s)$. On a $s(x) = 0$, donc $s \circ s(x) = 0$. Mais on a aussi $s \circ s(x) = x$. Donc $x = 0$.

(c) En déduire que $\text{Im}\,(s) = E$.

Solution: D'après le théorème du rang, on a $\dim \text{Im}\,(s) = \dim E$. Donc $\text{Im}\,(s) = E$.

3. On prend $E = \mathbb{C}$. Et on pose $p : z \mapsto \Re(z)$, la fonction qui associe à chaque complexe sa partie réelle.

(a) Montrer que p est une projection.

Solution: Soit $z = a + bi$. Calculons $\Re(\Re(z)) = \Re(a) = a$.

(b) Trouver la projection associée.

Solution: Soit $z = a + bi$ et on pose $r = Id - p$. $r(z) = a + bi - a = bi = i\Im(z)$.
r est donc la fonction qui à $a + bi$ associe bi.

(c) Trouver la symétrie associée à p.

Solution: Soit $z = a + bi$. On pose $s = 2p - Id$. Calculons $s(z) = 2a - a - bi = a - bi = \overline{z}$. s est donc la fonction qui à un complexe associe son conjugué. C'est la symétrie par rapport à l'axe des réels.

Exercice 2 : Réduction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente s'il existe k tel que $A^k = 0$. On note $\nu(A)$ le plus petit k qui vérifie cette égalité.

1. Trouver les matrices diagonales et nilpotentes.

Solution: La puissance d'une matrice diagonale est simplement la matrice diagonale constituée des puissances des éléments diagonaux. Si celles-ci sont nulles, alors la matrice de départ est nulle. Seule la matrice nulle est diagonale et nilpotente.

2. Déduire l'ensemble des matrices diagonalisable et nilpotente.

Solution: On a $A = PDP^{-1}$. Comme A est nilpotente, $A^{\nu(A)} = 0$. Or, $\forall i \in \mathbb{N}, A^i = PD^iP^{-1}$. Donc $PD^{\nu(A)}P^{-1} = 0$. En multipliant à gauche et à droite respectivement par P^{-1} et P. On trouve $D^{\nu(A)} = 0$. Donc seule la matrice nulle est diagonalisable et nilpotente.

3. Soit A une matrice quelconque. Supposons que A admette un vecteur propre x pour la valeur propre λ. Montrer que x est vecteur propre de A^k pour tout k. Quelle est la valeur propre associée ?

Solution: $A^k x = A^{k-1}(Ax) = A^{k-1}(\lambda x) = \lambda A^{k-1} x = \cdots = \lambda^k x$. Donc x est vecteur propre de valeur propre λ^k.

4. En déduire le spectre d'une matrice nilpotente.

Solution: Une matrice nilpotente ne peut avoir que 0 comme valeur propre. De plus, si elle était inverse, toutes ces puissances aussi, et aucune ne serait nulle. Donc les matrices nilpotentes ne sont pas inversibles, donc admettent 0 comme valeur propre. Donc le spectre d'une matrice nilpotente est $\{0\}$.

5. On rappelle que dans $\mathbb{C}$, le polynôme caractéristique d'une matrice est scindé et que l'ensemble des racines forment le spectre. Déterminer le polynôme caractéristique d'une matrice nilpotente de taille n.

Solution: $\chi_A = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_n) = X^n$ puisque le spectre est réduit à $\{0\}$.