Les déterminants, vos nouveaux amis

Marc CHEVALIER
DI ENS

mars 2019

Table des matières

On a besoin des déterminants. On va parler des permutations (section 1), car c'est nécessaire, mais il n'est pas vraiment utile de retenir ça.

Le plus important est de retenir l'intuition des déterminants et surtout, le calcul (sous-section 2.3). Il faut également la définition des polynômes caractéristiques et les quelques cas particuliers (qu'on peut aisément retrouver avec la définition et les propriétés sur les déterminants).

1 Permutations

1.1 Définition

On doit commencer par regarder les permutations pour définir les déterminants.

Cette section fait partie de celles qui ne sont là que parce que c'est nécessaire. C'est un sujet qui a le bon goût de nécessiter peu d'outils pour en maîtriser tous les aspects. Malgré ça, nous ne regarderons pas les permutations en détails. Pour les curieux, je suggère de regarder la notion d'orbite et la décomposition en cycles disjoints qui sont au cœur de la théorie des permutations. Une extension amusante est le théorème de Futurama[*].

Définition 1 – Permutation

Soit E un ensemble. Une permutation de E est une bijection de E dans lui-même.

Exemple 1

L'identité est toujours une permutation (très peu intéressante).
La fonction

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 2 \\ 2 &\mapsto 3 \\ 3 &\mapsto 1 \end{aligned}$$

est une permutation de $[\![1,3]\!]$.

Notation 1

On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$. $\mathfrak{S}_n$ est appelé le « groupe symétrique d'ordre n ».

La lettre $\mathfrak{S}$ est un "S" en fraktur[†]. Comme le nom de l'ensemble le laisse deviner, il forme un groupe. En effet, une permutation revient à mélanger les éléments d'un ensemble. Mélanger les éléments deux fois, c'est toujours un mélange.

---

*. cf. Futurama saison 6, épisode 10, allez le voir ! `https://en.wikipedia.org/wiki/The_Prisoner_of_Benda`

†. `https://fr.wikipedia.org/wiki/Fraktur`

Proposition 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe.

Démonstration. On va vérifier les différentes conditions de façon très pédestre. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

— Loi interne. Soit $(f, g) \in \mathfrak{S}_n{}^2$. f est une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même. Il en va de même pour g. D'après le cours qui va bien, $f \circ g$ est une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même.

— Associativité. Soit $(f, g, h) \in \mathfrak{S}_n{}^3$, $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

— Élément neutre. La fonction identité de $[\![1, n]\!]$, notée $Id_{[\![1,n]\!]}$ est l'élément neutre puisque pour tout $f \in \mathfrak{S}_n$, on a $Id_{[\![1,n]\!]} \circ f = f \circ Id_{[\![1,n]\!]} = f$

— Inverse. Soit $f \in \mathfrak{S}_n$. f étant une bijection, elle a une bijection réciproque f^{-1}, qui est aussi une permutation.

□

Proposition 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\operatorname{card}(\mathfrak{S}_n) = n!$$

Démonstration. On va se contenter d'une petite preuve informelle. On peut la faire comme il faut par récurrence.

Pour construire une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans lui même, il faut choisir l'image de 1. On a n possibilités distinctes. Puis l'image de 2. Comme la fonction doit être bijective, on ne peut pas utiliser $f(1)$, il n'y a donc que $n - 1$ choix possibles pour chacun des choix de $f(1)$ etc.. En arrivant à l'image de n, on a consommé $n - 1$ nombres, il n'en reste qu'un.

On a donc $n \times (n - 1) \times \cdots \times 1 = n!$ possibilités. □

Notons une bizarrerie. Le nombre d'éléments dans un ensemble est appelé cardinal en général. Mais dans le cas d'un groupe, le terme « ordre » est consacré. On peut donc dire que $\mathfrak{S}_n$ est d'ordre $n!$. Cependant, on se souvient que $\mathfrak{S}_n$ est appelé « groupe symétrique d'ordre n ». C'est une anomalie. Ici, il ne faut pas comprendre que c'est un groupe symétrique dont l'ordre est n, mais considérer ce nom comme une expression entière. Ce n'est pas un choix judicieux. On dira donc que le groupe symétrique d'ordre n est d'ordre $n!$ ♡.

$n!$ est une quantité qui devient très vite colossale. On ne va pas donner de gros exemples.

Exemple 2

Énumérons les éléments de $\mathfrak{S}_3$.

$$\begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases}$$

Et $3! = 6$. Ouf !

Les permutations sont des structures assez simples. Pour commencer, il n'y en a qu'une quantité finie. Et même si le nombre de permutations devient vite important, il y a beaucoup de simplifications. En effet, on peut engendrer toutes les permutations en échangeant les éléments deux à deux, ce sont des transpositions. De plus, il est possible d'y parvenir avec un choix de seulement $n-1$ transpositions et appliquer chacune au plus 2 fois.

On peut également décomposer une permutation en plusieurs paquets à l'intérieur desquels, il suffit de décaler chaque nombre à la place suivante. On parle de décomposition en cycles à supports disjoints.

1.2 Signature

Définition 2 – Inversion

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $i < j$. On dit que i et j sont en inversion si $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Exemple 3

Dans la permutation $\begin{cases} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 2 \end{cases}$ la paire $(1,2)$ forme une inversion car $1 < 2$ mais $\sigma(1) = 3 > 1\sigma(2)$. Il en va de même pour $(1,3)$. Cette permutation a au total 2 inversions.

Pour l'identité, $\forall i, \sigma(i) = i$, donc si $i < j, \sigma(i) < \sigma(j)$. Donc elle n'a aucune inversion.

Définition 3 – Signature

On appelle signature, notée ε, la fonction de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{-1;1\}$ qui à σ associe 1 si le nombre d'inversions de σ est pair, et -1 sinon. On dit respectivement que σ est paire et impaire.

Exemple 4

La permutation $\sigma = \begin{cases} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 2 \end{cases}$ a exactement 2 inversions. Donc $\varepsilon(\sigma) = 1$.
L'identité n'a pas d'inversion, elle est donc également paire.

Proposition 3

$\forall (\sigma, \sigma') \in {\mathfrak{S}_n}^2$,

$$\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma') = \varepsilon(\sigma \circ \sigma')$$

On peut dire que ε est un morphisme de groupes entre $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ et $(\{-1;1\}, \times)$.

Cette proposition laisse entrevoir de grandes possibilités ! Si on parvient à exprimer une permutation comme une composée de permutations simples, le calcul de la signature sera très simple.

Définition 4 – Transposition

Soit i et j deux entiers distincts de $[\![1, n]\!]$. On appelle transposition de i et j, et on note $\tau_{i,j}$ la permutation qui n'échange que i et j :

$$\begin{aligned} \tau_{i,j} : [\![1, n]\!] &\to [\![1, n]\!] \\ i &\mapsto j \\ j &\mapsto i \\ k \notin \{i, j\} &\mapsto k \end{aligned}$$

Exemple 5

Dans $\mathfrak{S}_{10}$, $\tau_{2,5}$ est

$$\begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 5 \\ 3 \mapsto 3 \\ 4 \mapsto 4 \\ 5 \mapsto 2 \\ 6 \mapsto 6 \\ 7 \mapsto 7 \\ 8 \mapsto 8 \\ 9 \mapsto 9 \\ 10 \mapsto 10 \end{cases}$$

C'est la même chose que $\tau_{5,2}$. En général, $\tau_{i,j} = \tau_{j,i}$.

Notation 2

Pour abréger, les permutations sont souvent données simplement par la liste de leurs images dans l'ordre. Par exemple, la précédente serait (1 5 3 4 2 6 7 8 9 10)

Proposition 4

La signature d'une transposition est -1.

La conséquence immédiate, c'est qu'il suffit de compter le nombre de transpositions pour trouver la signature. Si le nombre de transpositions nécessaires pour engendrer la permutation est paire, la permutation est paire. Et à l'inverse, s'il faut un nombre impaire de transpositions, la permutation est impaire. Il y a évidemment plusieurs façons d'obtenir une permutations à partir de transposition, et donc différents nombres, mais ce nombre sera toujours de même parité.

Exemple, calculons la signature de (2 3 5 1 4). On part de l'identité (1 2 3 4 5) qui est paire.

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5) \xrightarrow{1\leftrightarrow 2} (2\ 1\ 3\ 4\ 5) \quad \text{signature = -1}$$
$$(2\ 1\ 3\ 4\ 5) \xrightarrow{2\leftrightarrow 3} (2\ 3\ 1\ 4\ 5) \quad \text{signature = 1}$$
$$(2\ 3\ 1\ 4\ 5) \xrightarrow{3\leftrightarrow 5} (2\ 3\ 5\ 4\ 1) \quad \text{signature = -1}$$
$$(2\ 3\ 5\ 4\ 1) \xrightarrow{4\leftrightarrow 5} (2\ 3\ 5\ 1\ 4) \quad \text{signature = 1}$$

La signature est donc 1. On peut également compter les inversions. Il y a $(1,4)$ (qui ont respectivement pour image 2 et 1), $(2,4)$, $(3,4)$ et $(3,5)$. Il y en a 4, c'est bien un nombre pair.

2 Les déterminants

2.1 Approche intuitive

Les déterminants sont des quantités scalaires, c'est à dire appartenant au corps de base (typiquement, un réel ou un complexe), associées aux matrices. Cette quantité est une forme de généralisation du volume formé par les vecteurs (lignes ou colonnes) de la matrice.

Tout d'abord, précisons que ça n'existe que pour des matrices carrées. Pour une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

le déterminant est noté

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Avant de donner une définition brutale, cherchons ce qu'une telle application doit vérifier. On cherche une notion de volume orienté.

Expliquons un peu cette question d'orientation. Tout le monde accepte la notion d'une distance orientée, si on mesure un déplacement sur un axe orienté. Ainsi, on peut distinguer l'avant de l'arrière. De même, si on oriente un transfert d'énergie, on peut dire qu'on consomme de l'énergie quand on en reçoit une quantité positive et qu'on en produit si on reçoit une quantité négative. Bien, mais pour les volumes ? N'oublions pas que nos dimensions n'ont rien à voir :

si je consomme une puissance pendant une certaine durée, le produit me donnera une énergie. Et le signe de l'énergie reçu va dépendre du signe de la puissance reçue. Si je consomme une puissance positive pendant un certain temps, je consomme une quantité positive d'énergie. Au contraire, si je consomme une puissance positive en remontant le temps, je vais en fait produire une énergie.

Il est toutefois sain de rappeler que ces orientations dépendent d'un référentiel. Rien n'interdit d'orienter le flux d'énergie dans l'autre sens, ce qui change le signe de tout. Il faut donc un référentiel d'orientation. Dans le plan, on prend le sens trigonométrique, qui est une pure convention. Je peux tout faire en changeant le sens, ça marche exactement pareil. En fait, ce qui nous intéresse, c'est moins d'avoir une orientation que de comparer des orientations. Peu importe comment j'oriente un volume, son image dans un miroir sera retournée. C'est ce genre de propriétés qu'on veut exprimer.

Par conséquent, pour d'évidentes raisons pratiques, on choisit que l'orientation de la base canonique (quand il y en a une) est positive.

Tout d'abord, il est bon d'examiner les figures 1 et 2 pour avoir une idée de ce qu'on est en train de faire.

La figure 1 nous enseigne une chose. Lorsqu'on a deux vecteurs et une surface définie par ces deux vecteurs (la surface verte), en multipliant un des vecteurs par -1, on obtient une surface de même valeur absolue. Comme on veut des surfaces orientées, il est raisonnable de penser que la surface en bleue est l'opposée de la surface en vert (si on prend les vecteurs dans le même ordre). Également, comme les angles orientés, si on change l'ordre des vecteurs, on change le signe. Formellement, on va écrire

$$\begin{aligned}
&\det(u_1,\ldots,u_{i-1},u_i,u_{i+1},\ldots,u_n) = \quad \text{(inversion d'un vecteur)}\\
&\qquad -\det(u_1,\ldots,u_{i-1},-u_i,u_{i+1},\ldots,u_n)\\
&\det(u_1,\ldots,u_{i-1},u_i,u_{i+1},\ldots,u_{j-1},u_j,u_{j+1},\ldots,u_n) = \quad \text{(échange de deux vecteurs)}\\
&\qquad -\det(u_1,\ldots,u_{i-1},u_j,u_{i+1},\ldots,u_{j-1},u_i,u_{j+1},\ldots,u_n)
\end{aligned}$$

Continuons sur cette belle lancée. Si on allonge un vecteur d'une certaine quantité, la surface est augmentée d'autant

$$\begin{aligned}
&\det(u_1,\ldots,u_{i-1},\lambda u_i,u_{i+1},\ldots,u_n) = \quad \text{(homogénéité)}\\
&\qquad \lambda\det(u_1,\ldots,u_{i-1},u_i,u_{i+1},\ldots,u_n)\\
&\det(u_1,\ldots,u_{i-1},u_i+v,u_{i+1},\ldots,u_n) = \quad \text{(additivité)}\\
&\qquad \det(u_1,\ldots,u_{i-1},u_i,u_{i+1},\ldots,u_n)+\det(u_1,\ldots,u_{i-1},v,u_{i+1},\ldots,u_n)
\end{aligned}$$

On en déduit :

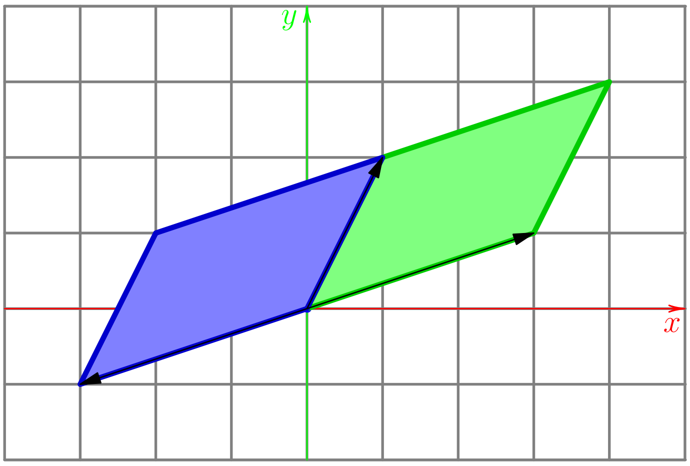

FIGURE 1 – Trois vecteurs et deux surfaces

$$\det(\lambda u_1, \ldots, \lambda u_n) = \lambda^n \det(u_1, \ldots, u_n)$$

On a donc une fonction qui est linéaire en chacune des variables (on dit qu'elle est multilinéaire) et qui change de signe en échangeant deux vecteurs (on dit qu'elle est alternée). De façon surprenante, ça définit presque uniquement le déterminant. Il faut encore fixer l'échelle. Comme on est dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il suffit de dire que le volume du cube de taille $1 \times 1 \times \cdots \times 1$ est 1. C'est-à-dire, le déterminant de la matrice identité est 1.

Alors quelle est l'unité ? En math, on s'en fiche. En physique, ça va dépendre de la dimension de la matrice. Pour une matrice $n \times n$, l'unité du déterminant sera typiquement des m^n, puisque c'est un volume en dimension n.

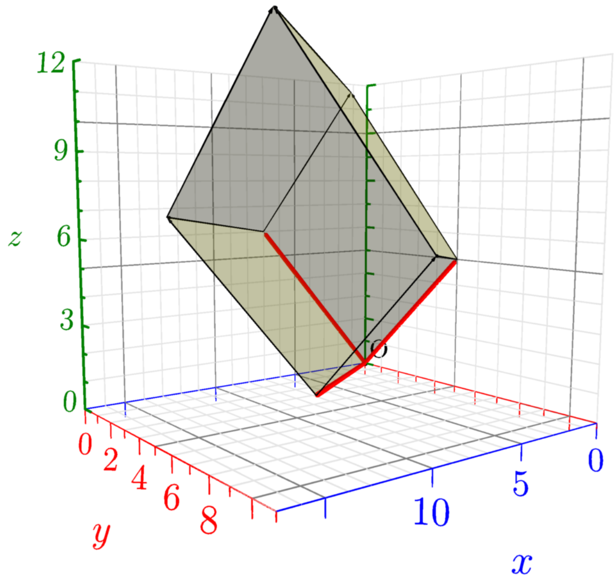

FIGURE 2 – Trois vecteurs et un volume

2.2 Définition et propriétés élémentaires

Définition 5 – Formule de LEIBNIZ

Pour une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, on appelle déterminant de A, noté $\det A$ ou $|A|$ la quantité

$$\det A = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

On a vu qu'il y a $n!$ permutations de $[\![1,n]\!]$. Le calcul direct est exclu ! Il existe d'autres méthodes pour calculer le déterminant qui ne demandent qu'un nombre d'opération de l'ordre de n^3.

Proposition 5

$\forall (A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$,

$$\det(AB) = \det A\cdot\det B$$

On en déduit deux choses. Tout d'abord, le déterminant de l'identité. Comme $\det(AI_n) = \det A$ puisque $AI_n = A$ et que $\det(AI_n) = \det A\det I_n$, on a $\det I_n = 1$.

Ensuite, si A est inversible, $\det(AA^{-1}) = \det I_n = 1$. Donc $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

FIGURE 3 – Gottfried Wilhelm LEIBNIZ — 1646 – 1716

On en déduit que le déterminant des matrices inversibles est non nul. Mais c'est beaucoup mieux que ça ! On a la réciproque.

Théorème 1

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.
Ou pompeusement

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), (A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det A \neq 0)$$

Ne pensez pas que c'est magique. Les meilleures méthodes du calcul du déterminants consistent à faire à peu près les mêmes opérations que pour inverser la matrice.

On peut adapter en matrice une des propositions déjà vue :

Proposition 6

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K},$

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$$

On peut faire de même avec les autres avec plus de peine. Si on échange deux lignes ou colonnes de la matrice, le déterminant change de signe. Si on multiplie une ligne ou une colonne par un scalaire, le déterminant est également multiplié par le même scalaire, etc..

2.3 Calcul des déterminants

Voyons des méthodes pour calculer efficacement le déterminant, car c'est une opération qu'on a parfois besoin de faire.

2.3.1 Déterminants de taille 2

Ici, ça vaut le coup d'apprendre le truc par cœur, c'est assez simple. Mais posons le calcul, pour voir.

On a $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

On calcule $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ avec la formule directe. Il faut trouver les permutations de $[\![1, 2]\!]$. Heureusement, il n'y en a que 2. C'est l'identité et la transposition de 1 et 2. La signature de la première est 1 et de la seconde -1.

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{2} a_{i,\sigma(i)} \\
&= \varepsilon(Id) \prod_{i=1}^{2} a_{i,Id(i)} + \varepsilon(\tau_{1,2}) \prod_{i=1}^{2} a_{i,\tau_{1,2}(i)} \\
&= \prod_{i=1}^{2} a_{i,Id(i)} - \prod_{i=1}^{2} a_{i,\tau_{1,2}(i)} \\
&= a_{1,Id(1)} a_{2,Id(2)} - a_{1,\tau_{1,2}(1)} a_{2,\tau_{1,2}(2)} \\
&= a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1} \\
&= ad - bc
\end{aligned}$$

Théorème 2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

On peut résumer avec cet élégant schéma (cf. figure 4).

$$\begin{array}{c} + \\ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \\ - \end{array}$$

FIGURE 4 – Déterminant de taille 2

2.3.2 Déterminants de taille 3

Pour les déterminants de taille 3, le calcul est un peu plus long. Il y a 6 permutations, mais on finit par retrouver ses petits.

Après un peu de calcul qu'on laisse au lecteur, on trouve

Théorème 3

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} \\ -a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} \end{array}$$

Mais là, vous éclatez. « C'est nul comme formule ! Comment peut-on retenir ça ! C'est encore pire que la définition ! ». Et... c'est pas faux. Mais il existe un moyen mnémotechnique appelé règle de SARRUS. Regardez donc la figure 5.

On a recopié les deux premières colonnes à droite de la matrice. On peut voir ce déterminant comme la somme des diagonales descendantes auxquelles on enlève les diagonales montantes.

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ \multicolumn{3}{|c|}{\begin{array}{ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array}} & \multicolumn{2}{c}{\begin{array}{cc} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{array}} \\ - & - & - & & \end{array}$$

FIGURE 5 – Règle de SARRUS

Ça ressemble étrangement au cas 2×2. Oui, mais ça s'arrête là ! Ce n'est pas la méthode générale pour calculer un déterminant ! Les diagonales moins les antidiagonales, ça ne marche que jusqu'à 3×3, et totalement par accident ! Le premier qui me fait ça en dimension supérieure, il passe par les fenêtres qui manquent cruellement à la salle de classe.

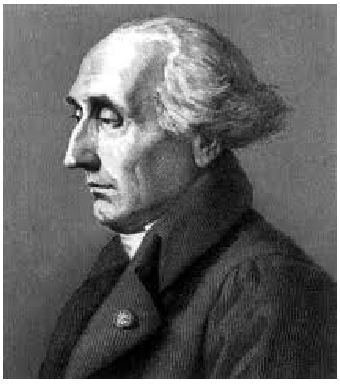

FIGURE 6 – Pierre-Frédéric SARRUS — 1798 – 1861

2.3.3 Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Ici, on veut ramener le calcul d'un gros déterminant au calcul de plusieurs déterminants plus petits.

Définition 6

Soit A une matrice. On appelle mineur du couple (i, j) (souvent noté $M_{i,j}$) le déterminant de la matrice obtenue en prenant A et en retirant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Exemple 6

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Le mineur $M_{1,2}$ est obtenu en enlevant la première ligne et la seconde colonne.

$$M_{1,2} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 4 \times 9 - 6 \times 7 = 36 - 42 = -6$$

Définition 7

Soit A une matrice. On appelle cofacteur du couple (i, j) (souvent noté $C_{i,j}$) la valeur

$$C_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$$

Exemple 7

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Le mineur $C_{1,2}$ est obtenu en enlevant la première ligne et la seconde colonne puis en multipliant par $(-1)^{1+2}$.

$$C_{1,2} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^3 \times (-6) = 6$$

Théorème 4 – Développement par rapport à une ligne, formule de LAPLACE

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i \in [\![1, n]\!]$.

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} C_{i,j}$$

On explique. Le déterminant de A est la somme de chaque élément de la ligne multiplié par le cofacteur associé (obtenu en supprimant la ligne et la colonne du coefficient et multiplié par $(-1)^{i+j}$).

Exemple 8

On prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Si on veut développer par rapport à la deuxième ligne :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \color{red}{4} & \color{blue}{5} & \color{green}{6} \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= \color{red}{4}C_{2,1} + \color{blue}{5}C_{2,2} + \color{green}{6}C_{2,3} \\ &= (-1)^{2+1} 4M_{2,1} + (-1)^{2+2} 5M_{2,2} + (-1)^{2+3} 6M_{2,3} \\ &= -4M_{2,1} + 5M_{2,2} - 6M_{2,3} \\ &= -4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

On remarque que les signes sont alternés dans le développement. Le calcul commence par un "$+$" si on développe une ligne de rang impair et par "$-$" sinon.

Théorème 5 – Développement par rapport à une colonne

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $j \in [\![1, n]\!]$.

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} C_{i,j}$$

Exemple 9

On prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Si on veut développer par rapport à la première colonne :

$$\begin{vmatrix} \color{red}{1} & 2 & 3 \\ \color{blue}{4} & 5 & 6 \\ \color{green}{7} & 8 & 9 \end{vmatrix} = \color{red}{1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - \color{blue}{4} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + \color{green}{7} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

Avec ces méthodes, on réduit le calcul d'un déterminant de taille $n \times n$ à n déterminants de taille $(n-1) \times (n-1)$. Aïe ! Si on continue ainsi, on va faire $n!$ calculs. Certes. Mais on peut être intelligent.

Comment choisir son développement ? Il faut choisir une ligne ou une colonne qui contient autant de 0 que possible. Ainsi, chaque cofacteur correspondant sera multiplié par 0, et on peut tout simplement l'ignorer. Par exemple, si je veux le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, il est particulièrement judicieux de développer par rapport à la première ligne !

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= 0 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

On a économisé beaucoup de calcul !

FIGURE 7 – Pierre-Simon de LAPLACE — 1749 – 1827

2.3.4 Matrices triangulaires

On dit qu'une matrice est triangulaire supérieure (resp. inférieure) si ses coefficients en-dessous (resp. au-dessus) de la diagonale sont 0.

Les déterminants d'une matrice triangulaire sont particulièrement simples à calculer. Il s'agit simplement du produit des éléments diagonaux.

Proposition 7

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdots a_{n,n}$$

Démonstration. Développons par rapport à la première colonne. Comme seul le premier terme n'est pas nul, on a

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

On voit clairement la récurrence. Il suffit de vérifier l'initialisation : $\left|a_{n,n}\right| = a_{n,n}$. Parfait ! □

De la même façon

Proposition 8

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{1,n} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdots a_{n,n}$$

et en particulier

Proposition 9

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdots a_{n,n}$$

3 Polynôme caractéristique

« Qu'est ce qu'il nous fait encore. Ça s'appelle polynôme, pourquoi n'est ce pas avec les autres polynômes ? ». Ce polynôme est un déterminant.

Le lecteur attentif aura constaté que le déterminant n'est jamais qu'une somme de produits de coefficients de la matrices. On peut voir ça comme un polynôme avec beaucoup de variables. Beaucoup trop pour être étudié directement. Toutefois, si on fixe certains coefficients et qu'on en laisse d'autres variables, on obtient un vrai polynôme avec peu de variables.

Définition 8 – Polynôme caractéristique d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de A, et on note χ_A le polynôme

$$\chi_A = \det(XI_n - A)$$

Exemple 10

Prenons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $XI_2 - A = X\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X-2 & -1 \\ 1 & X \end{pmatrix}$

Donc $\chi_A = \begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ 1 & X \end{vmatrix}$. D'après la formule pour les déterminants de taille 2, $\chi_A = (X-2)X - (-1) \times 1 = X^2 - 2X + 1$

Proposition 10

Un polynôme caractéristique est toujours unitaire.

On rappelle qu'un polynôme unitaire est un polynôme dont le coefficient dominant est 1.

Proposition 11

Soit A et B, des matrices. Si $A \sim B$, alors $\chi_A = \chi_B$.

Démonstration. Il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible, tel que $A = PBP^{-1}$.

$$\begin{aligned}
\chi_A &= \det(XI_n - A) \\
&= \det(XI_n - PBP^{-1}) \\
&= \det(XPI_nP^{-1} - PBP^{-1}) \\
&= \det(P(XI_n)P^{-1} - PBP^{-1}) \\
&= \det(P(XI_n - B)P^{-1}) \\
&= \det P \det(XI_n - B) \det P^{-1} \\
&= \det P \det(XI_n - B)(\det P)^{-1} \\
&= \det(XI_n - B) \\
&= \chi_B
\end{aligned}$$

□

Proposition 12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_A(0) = (-1)^n \det A$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\chi_A(0) &= \det(XI_n - A)(0) \\
&= \det(-A) \\
&= \det((-1)A) \\
&= (-1)^n \det A
\end{aligned}$$

□

Proposition 13

$$\chi_{Id_n} = (X-1)^n$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\chi_{Id_n} &= \det(XId_n - Id_n) \\
&= \det\left(X \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{vmatrix} X-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & X-1 \end{vmatrix} \\
&= (X-1)^n
\end{aligned}$$

□

On peut généraliser ce résultat avec une preuve quasiment identique

Proposition 14

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire supérieure. On a

$$\chi_A = (X - a_{1,1}) \cdots (X - a_{n,n})$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\chi_A &= \det(XId - A) \\
&= \det\left(X \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \right) \\
&= \det\left(\begin{pmatrix} X - a_{1,1} & -a_{1,2} & \cdots & -a_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & X - a_{n,n} \end{pmatrix} \right) \\
&= (X - a_{1,1}) \cdots (X - a_{n,n})
\end{aligned}$$

□

On ne tentera pas de développer ce polynôme. Ce serait très laborieux (cf. cours sur les polynômes, relation entre racines et coefficients), mais en plus, très inutile, car ce qui nous intéresse, c'est d'avoir le polynôme caractéristique le plus factorisé possible.

Il existe un résultat similaire pour les matrices triangulaires inférieures. Et en particulier :

Proposition 15

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$ une matrice diagonale. On a

$$\chi_A = (X - a_{1,1}) \cdots (X - a_{n,n})$$

Le polynôme est déjà tout factorisé. On a de bonnes raisons de penser que les matrices triangulaires sont spécialement gentilles. On verra aussi que les matrices diagonales sont encore plus gentilles.

Mais les usages du polynôme caractéristique, ce sera pour une autre fois !


C'EST TOUT
POUR AUJOUR
D'HUI