Morphismes et matrices

Marc CHEVALIER
DI ENS

mars 2019

Table des matières

Nous avons vu que les espaces vectoriels vérifient des propriétés de linéarité très sympathiques. Il serait dommage d'en rester là. Il existe une classe de fonctions qui préservent ces propriétés. De telles fonctions sont appelées des morphismes ou applications linéaires.

Grâce à cette condition, on peut déduire plein de propriétés puissantes sur les morphismes.

Les couleurs utilisées dans ce cours sont là pour lever l'ambiguïté sur les opérations et constantes. Par exemple, l'addition dans un espace vectoriel est toujours noté $+$. Mais ici, la couleur permet de savoir de quel $+$ on parle. C'est toutefois facultatif car le type des opérations permet de le déduire aussi bien.

1 Morphismes

Définition 1 – Applications linéaires

Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application linéaire (ou morphisme ou, plus rarement, homomorphisme) de $(E, +, \bullet)$ dans $(F, +, \bullet)$ est une fonction φ de E dans F qui vérifie les deux propriétés suivantes :

1. *(additivité)* $\forall u, v \in E$, on a : $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$;
2. *(homogénéité)* $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall u \in E$, on a : $\varphi(\lambda \bullet u) = \lambda \bullet \varphi(u)$.

L'ensemble des applications linéaires de $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Définition 2 – Endomorphismes

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une application linéaire de $(E, +, \bullet)$ dans $(E, +, \bullet)$ dans lui même est appelée un endomorphisme.
L'ensemble des endomorphismes de $(E, +, \bullet)$ est noté $\mathcal{L}(E)$.

Définition 3 – Isomorphismes

Un isomorphisme est une application linéaire bijective.
L'ensemble des isomorphismes entre un espace vectoriel $(E, +, \bullet)$ et un autre $(F, +, \bullet)$ est noté $\mathrm{Isom}(E, F)$.

Définition 4 – Automorphismes

Un automorphisme est un morphisme bijectif.
L'ensemble des automorphismes d'un espace linéaire $(E, +, \bullet)$ est noté $\mathcal{GL}(E)$.

Définition 5 – Forme linéaire

Une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dans l'espace $(\mathbb{K}, +, \bullet)$ est appelée une forme linéaire.

Exemple 1

Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors la fonction φ de E dans F qui associe à tout vecteur $u \in E$ le vecteur 0 est une application linéaire.

Démonstration. Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors la fonction φ de E dans F qui associe à tout vecteur $u \in E$ le vecteur 0.

- φ est une fonction de E dans F.
- Soit $u, v \in E$. On a : $\varphi(u + v) = 0_F$, puis $0 = 0 + 0$, et $0 + 0 = \varphi(u) + \varphi(v)$. Donc $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$.
- Soient $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a : $\varphi(\lambda \bullet u) = 0$, puis $0 = \lambda \bullet 0$, et $\lambda \bullet 0 = \lambda \bullet \varphi(u)$. Donc $\varphi(\lambda \bullet u) = \lambda \bullet \varphi(u)$.

□

Exemple 2

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors la fonction Id_E est un automorphisme de E.

Démonstration. Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- La fonction Id_E est une fonction de E dans E.
- La fonction Id_E est une bijection.
- Soit $u \in E$, $v \in E$,
  on a : $Id_E(u + v) = u + v$; or $Id_E(u) = u$ et $Id_E(v) = v$. et $\lambda \in \mathbb{K}$; donc $Id_E(u + v) = Id_E(u) + Id_E(v)$.
- Soit $u \in E$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$,
  on a : $Id_E(\lambda \bullet u) = \lambda \bullet u$; or $Id_E(u) = u$; donc $Id_E(\lambda \bullet u) = \lambda \bullet Id_E(u)$.

Donc $Id_E \in \mathcal{GL}(E)$. □

Exemple 3

La fonction φ définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}^2 &\to \mathbb{K}^2 \\ (x, y) &\mapsto (y, x) \end{aligned}$$

est un automorphisme de $(K^2, +, \bullet)$

Exemple 4

La fonction φ définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}^2 &\to \mathbb{K} \\ (x, y) &\mapsto x + 2 \cdot y \end{aligned}$$

est une forme linéaire de $\mathbb{K}^2$.

Exemple 5

La fonction *diff* définie par :

$$\begin{aligned} \mathit{diff} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\to \mathcal{F}(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto f' \end{aligned}$$

est une application linéaire de l'espace des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de l'addition et du produit externe point à point, dans l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de l'addition et du produit externe point à point.

Exemple 6

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. La fonction $\int_I$ de l'espace des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ intégrables muni de l'addition et du produit externe point à point dans l'espace $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, et qui associe à toute fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ intégrable, le réel $\int_I f$, est une application linéaire.

Exemple 7

Toute fonction φ de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$, qui vérifie $\varphi(q + q') = \varphi(q) + \varphi(q')$ est une forme linéaire.

Démonstration. En exercice $\square$

Proposition 1

Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et φ une application linéaire de E dans F. Alors $\varphi(0) = 0$.

Démonstration. Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On a $0 = 0 \bullet 0$.

Puis $\varphi(0) = \varphi(0 \bullet 0)$.
Et par la définition 1.(2), $\varphi(0) = 0 \bullet \varphi(0)$.
Puis $0 \bullet \varphi(0) = 0$.
Donc $\varphi(0) = 0$. $\square$

Proposition 2

Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et φ une application linéaire de E dans F. Soit $u \in E$, Alors $\varphi(-u) = -\varphi(u)$.

Démonstration. Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et φ une application linéaire de E dans F. Soit $u \in E$.
Puis, on a $u + (-u) = 0$.
Or, comme $u + (-u) = 0$ et par la propriété 1, $\varphi(u + (-u)) = 0$.
D'autre part, par la définition 1.(1), on a : $\varphi(u + (-u)) = \varphi(u) + \varphi(-u)$.
D'où :$\varphi(u) + \varphi(-u) = 0$.
Donc, $-\varphi(u) = \varphi(-u)$. $\square$

Proposition 3

Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et φ une fonction de E dans F. Alors φ est une application linéaire de $(E, +, \bullet)$ dans $(F, +, \bullet)$ si et seulement si, pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, tout couple de vecteurs $(u, v) \in E^2$, on a : $\varphi(u + \lambda \bullet v) = \varphi(u) + \lambda \bullet \varphi(v)$.

Démonstration. Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit φ une fonction de E dans F.

— $(\Rightarrow)$ On suppose que φ est une application linéaire.
Soit $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Par la définition 1.(1), on a : $\varphi(u + \lambda \bullet v) = \varphi(u) + \varphi(\lambda \bullet v)$.
Par la définition 1.(2), on a : $\varphi(\lambda \bullet v) = \lambda \bullet \varphi(u)$.
Puis, $\varphi(u + \lambda \bullet v) = \varphi(u) + \lambda \bullet \varphi(v)$.

— $(\Leftarrow)$ On suppose que φ satisfait $\varphi(u + \lambda \bullet v) = \varphi(u) + \lambda \bullet \varphi(v)$, pour tout $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Soient u et v deux vecteurs de E.
   On a $v = 1 \bullet v$.
   Puis, $\varphi(u + v) = \varphi(u + 1 \bullet v)$.
   Puis par hypothèse, $\varphi(u + 1 \bullet v) = \varphi(u) + 1 \bullet \varphi(v)$.

Or $\varphi(v) = 1\bullet\varphi(v)$.
Puis, $\varphi(u)+1\bullet\varphi(v) = \varphi(u)+\varphi(v)$.
Donc, $\varphi(u+v) = \varphi(u)+\varphi(v)$.

2. Soit $u \in E$ un vecteur et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire.
   On a : $\lambda\bullet u = 0+\lambda\bullet u$.
   D'où, $\varphi(\lambda\bullet u) = \varphi(0+\lambda\bullet u)$.
   Puis, par hypothèse, $\varphi(0+\lambda\bullet u) = \varphi(0)+\lambda\bullet\varphi(u)$.
   Puis, par la propriété 1, on a $\varphi(0) = 0$.
   Donc, $\varphi(0+\lambda\bullet u) = 0+\lambda\bullet\varphi(u)$.
   Or par la définition d'un espace vectoriel, $0+\lambda\bullet\varphi(u) = \lambda\bullet\varphi(u)$.
   Puis, $\varphi(\lambda\bullet u) = \lambda\bullet\varphi(u)$.

□

2 Matrices

Il existe une autre représentation des morphismes en dimension finie, ce sont les matrices. Elles sont souvent beaucoup plus simple à manipuler. On commence par les définir puis on fait le lien avec les morphismes.

2.1 Définition et opérations

Définition 6 – Matrice

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. On appelle une matrice d'éléments de $\mathbb{K}$ à m lignes et à n colonnes une famille d'éléments $(a_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ de $\mathbb{K}$ indexée par les couple (i, j) où i varie entre 1 et m, et j varie entre 1 et n.
On dit aussi que $(a_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ est une matrice de taille $m \times n$.
On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de tailles $m \times n$ d'élément de $\mathbb{K}$.
Enfin, lorsque $m = n$, on dit que les matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sont carrées de taille m. Dans ce cas, on note simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Notation 1

On note habituellement les éléments d'une matrice sous forme de tableau.
Par exemple, la matrice de taille 3×3 et d'éléments $(a_{i,j})_{1\leq i\leq 3, 1\leq j\leq 3}$ sera notée :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

Définition 7 – Ligne

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A := (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$. Soit i_0 un entier entre 1 et m. On appelle i_0-ième ligne de A, la famille de n éléments de $\mathbb{K}$ $(a_{i_0,j})_{1 \leq j \leq n}$.

Définition 8 – Colonne

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs Soit $A := (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$. Soit j_0 un entier entre 1 et n. On appelle j_0-ième colonne de A, la famille de m éléments de $\mathbb{K}$ $(a_{i,j_0})_{1 \leq i \leq m}$.

Définition 9 – Somme

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On note $A := (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ et $B := (b_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. La matrice $(a_{i,j} + b_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ est appelée la somme des deux matrices A et B. On la note $A + B$.

Exemple 8

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 10 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 14 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$

Définition 10 – Produit externe

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On note $A := (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. La matrice $(\lambda \cdot a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ est appelée le produit de la matrice A par le scalaire λ. On la note $\lambda \cdot A$.

Exemple 9

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 10 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 20 & 4 & -2 \\ 10 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

On utilise ici le symbole de Kronecker δ_i^j (parfois aussi noté $\delta_{i,j}$ ou $\delta^{i,j}$)défini par

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = [i = j]^{*}$$

*. https://fr.wikipedia.org/wiki/Crochet_d%27Iverson

Définition 11

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit k un entier entre 1 et m et soit k' un entier entre 1 et n. On note $E_{k,k'} := (\delta_i^k \cdot \delta_j^{k'})$ la matrice de taille $m \times n$ dont tous les éléments sont nuls, sauf dans la case à la ligne k et à la colonne k' dans laquelle la valeur est 1.

Proposition 4

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $m \cdot n$. De plus, la famille des matrices élémentaire $(E_{i,j}^{m,n})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$ est une base de $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$.

Démonstration. On sait que $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Puis $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. La famille $(E_{i,j})$ est une base car la famille (1) est une base de $(\mathbb{K}, +, \cdot)$. $\square$

Définition 12 – Produit interne

Soient $m, n, o \in \mathbb{N}$ trois entiers positifs. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,o}(\mathbb{K})$. On note $A := (a_{i,j})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$ et $B := (b_{i,j})_{1 \le i \le n, 1 \le k \le o}$. La matrice $(c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,o}(\mathbb{K})$ définie par :

$$c_{i,j} := \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \cdot b_{k,j},$$

pour $1 \le i \le m$ et $1 \le j \le o$, est appelée le produit entre A et B, et est notée $A \times B$.

Attention, on note bien qu'il faut que le nombre de colonnes de la première matrice soit égale au nombre de lignes de la seconde.

On justifiera cette définition bizarre en voyant le lien avec les morphismes.

Exemple 10

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 10 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 8 & 3 \\ 22 & 18 & 19 \\ 66 & 20 & 4 \end{pmatrix}$$

Démonstration.

$$
\begin{array}{cc|ccc}
 & & 3 & 4 & 5 \\
 & & 10 & 2 & -1 \\
\hline
1 & 2 & 1\cdot 3+2\cdot 10 & 1\cdot 4+2\cdot 2 & 1\cdot 5+2\cdot(-1) \\
4 & 1 & 4\cdot 3+1\cdot 10 & 4\cdot 4+1\cdot 2 & 4\cdot 5+1\cdot(-1) \\
2 & 6 & 2\cdot 3+6\cdot 10 & 2\cdot 4+6\cdot 2 & 2\cdot 5+6\cdot(-1)
\end{array}
$$

□

Proposition 5 – Associativité de la multiplication

Soient $m, n, o, p \in \mathbb{N}$ quatre entiers. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,o}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{o,p}(\mathbb{K})$ trois matrices à valeur dans $\mathbb{K}$.
Alors :

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C.$$

Démonstration. Exercice □

Par contre, en toute généralité, on n'a pas $A \times B = B \times A$.

2.2 Lien avec les morphismes

Prenons deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$. On pose $n = \dim E$ et $m = \dim F$.

On se donne une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et $(f_1, \ldots, f_m)$ de E. On prend également $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, un morphisme de E dans F.

Prenons un vecteur $u \in E$. Comme la famille $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base, il existe une unique famille $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

Calculons $\varphi(u)$.

$$
\begin{aligned}
\varphi(u) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\lambda_i e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi\left(e_i\right)
\end{aligned}
$$

On voit que $\varphi(u)$ s'exprime en fonction des $(\varphi(e_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$ avec les mêmes coefficients. On en déduit donc que toute image par φ est une combinaison linéaire de l'image d'une base. Et il suffit de connaître l'image des vecteurs d'une base pour que le morphisme soit entièrement déterminé.

Soyons fou, et notons $(\mu_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,m]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}}$ tel que

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu_{j,i} f_j$$

J'avais avancé qu'il suffisait de connaître la famille $(\varphi(e_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$ pour définir entièrement φ. on peut aller plus loin. Étant donné les familles $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(f_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$, il suffit de connaître les coefficients $(\mu_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,m]\!]}}$ pour définir entièrement φ, grâce à la relation ci-dessus. On a découpé chaque $\varphi(e_i)$ dans la base f.

On reprend le développement du début :

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi\left(e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{m} \mu_{j,i} f_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_{j,i} f_j \\
&= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_{j,i} f_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_{j,i}\right) f_j
\end{aligned}$$

Et alors, si on mets ça dans un tableau ? On obtient la matrice de taille $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} \mu_{1,1} & \cdots & \mu_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{m,1} & \cdots & \mu_{m,n} \end{pmatrix}$$

Si on s'arrête là, je convient de l'intérêt est limité, mais on peut faire du calcul avec ces matrices.

En gardant cette idée en tête, notons

$$u = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

et voyons ce que fait la multiplication Au. On remarque que A a n colonnes et u a n lignes : la multiplication est donc légale. De plus, on sait que ,le résultat va faire m lignes et 1 colonne.

$$\begin{aligned} Au &= \begin{pmatrix} \mu_{1,1} & \cdots & \mu_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{m,1} & \cdots & \mu_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_{1,i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_{m,i} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On reconnaît bien le développement de $\varphi(u)$ dans la base $(f_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$. On dit que A est la matrice de u dans les bases $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, et $(f_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$.

On constate bon que le nombre de colonnes de A est la dimension de l'espace de départ et le nombre de lignes, la dimension de l'espace d'arrivée.

Allons plus loin et prenons un autre morphisme $\psi \in \mathcal{L}(E, F)$, représenté par la matrice B. La matrice qui représente $\varphi + \psi$ est $A + B$.

Enfin, si on se donne un troisième $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(G, +, \bullet)$ de dimension o, une base $(g_i)_{i\in[\![1,o]\!]}$ de G et un morphisme $\xi \in \mathcal{L}(F, G)$ représenté par la matrice C dans les bases $(f_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ et $(g_i)_{i\in[\![1,o]\!]}$, la matrice qui représente le morphisme $\xi \circ \varphi$ est $C \times A$. On remarque qu'on fait la multiplication dans le même sens que la composition

2.3 Changement de base

Nous avons vu que la matrice qui représente un morphisme dépend des bases choisies. Souvent, on choisira les bases canoniques. Mais ce n'est pas toujours le plus simple, et on aimerait être capable de changer les bases dans lesquelles on exprime un morphisme.

On se donne deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$. On pose $n = \dim E$ et $m = \dim F$. Prenons en plus une base e de E et f de F. On prend aussi un morphisme $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.

On note $A_{e,f}$ la matrice qui représente φ dans les bases e et f.

Si on a deux autres bases e' de E et f' de F, comment trouver la matrice $A_{e',f'}$?

Étant donné un vecteur $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ écrit dans la base e. On peut calculer $\varphi(e)$ dans la base f en calculant $A_{e,f} \times u$.

Mais si on a $u' = \begin{pmatrix} u'_1 \\ \vdots \\ u'_n \end{pmatrix}$, un vecteur exprimer dans la base e', on ne peut pas utilise $A_{e,f}$ directement. Il faut commencer par trouver comment écrire u' dans la base e. Ensuite, on peut utilise $A_{e,f}$. Enfin, il faut changer la base de l'image pour l'écrire dans la base f'.

Il existe une astuce : il suffit d'utiliser la matrice qui représente l'identité dans les bases e' et e. Notons la $P_e^{e'}$. Si je calcule $P_e^{e'} \times u'$, je trouve le même vecteur (puisque c'est la matrice de l'identité) mais exprimé dans la base e. De plus, une fois que j'ai $A_{e,f} \times P_e^{e'} \times u'$, qui est l'image de u' dans la base f, je dois encore utiliser $P_{f'}^{f}$ pour trouver $\varphi(u')$ exprimer dans la base f'.

Et donc l'image de u' dans f', est $P_{f'}^{f} \times A_{e,f} \times P_e^{e'} \times u'$ Donc $A_{e',f'} = P_{f'}^{f} \times A_{e,f} \times P_e^{e'}$. En d'autres termes : on prend un vecteur dans e', on le réécrit dans e, on applique la matrice qui représente φ entre e et f, puis on réécrit le résultat de f à f'.

Le problème est réglé... À un détail près ! Comment trouver les matrices $P_{f'}^{f}$ et $P_e^{e'}$?

2.4 Matrices de passages

On reprend les données de la sous-section précédente.

Commençons par remarquer que $P_e^{e'}$ est nécessairement de taille $n \times n$.

Prenons le vecteur e'_1, premier vecteur de la base e'. Son expression dans la base e' est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si on note

$$P_e^{e'} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix}$$

Le vecteur

$$\begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1,1} \\ \vdots \\ p_{n,1} \end{pmatrix}$$

est la première colonne de $P_e^{e'}$ et représente e'_1 dans la base e.

On en déduit que $P_b^{b'}$ sont les vecteurs de la base b' exprimés dans la base b.

Exemple 11

On se donne la base $f = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et on appelle e la base canonique.

L'expression des vecteurs de f dans e est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, par définition. On a donc $P_e^f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En effet, si on prend le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans f, dans la base canonique c'est $1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Et on a bien $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Maintenant, si on prend la base $g = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, calculer P_e^g est simple, mais si on veut passer directement de f à g ? On peut se dire que passer de f à g, c'est comme passer de f à e et de e à g. Donc $P_g^f = P_g^e P_e^f$. Mais alors, comment trouver P_g^e, il faut exprimer les vecteurs de la base canonique dans la base g. Difficile.
Mais on peut alors se dire que passer un vecteur de la base e à la base g, puis de nouveau à e, c'est comme ne rien faire. Donc $P_e^g P_g^e = P_g^e P_e^g = I_n$. On peut tenter de trouver P_g^e ainsi. On verra plus loin comment faire.

Il nous faut un peu plus d'outils avant de pouvoir ajouter quelques propriétés utiles.

2.5 Cas des endomorphismes

Dans le cas des endomorphismes, comme l'espace de départ est le même que l'espace d'arrivée, il est commun de choisir la même base au départ et à l'arrivée. On a alors
$$A_{e',e'} = P_{e'}^{e} \times A_{e,e} \times P_{e}^{e'}$$
On peut alors chercher une base qui rend la matrice la plus simple possible. On parle de réduction des endomorphismes. Ce domaine est très apprécié des physiciens et des maths numériques car il permet de se mettre dans les meilleures conditions pour faire du calcul.

3 Propriétés

Proposition 6

Soit $(E,+,\bullet)$ et $(F,+,\bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors l'ensemble des applications linéaires de $(E,+,\bullet)$ dans $(F,+,\bullet)$, muni de la somme $+$ point à point et du produit externe $\bullet$ point à point, est un espace vectoriel.

Démonstration. Soit $(E,+,\bullet)$ et $(F,+,\bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Montrons que $(\mathcal{L}(E,F),+,\bullet)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(E,F),+,\bullet)$.

— $(\mathcal{F}(E,F),+,\bullet)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
— On a : $\mathcal{L}(E,F) \subseteq \mathcal{F}(E,F)$.
— Par l'exemple 1, la fonction constante de E dans F, qui à tout élément $u \in E$ associe 0 est une application linéaire de E dans F.
— Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E,F)$.
$\varphi + \psi$ est une fonction de E dans F.
De plus, pour $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :
$$\begin{aligned}
[\varphi+\psi](u+\lambda\bullet v) &= \varphi(u+\lambda\bullet v)+\psi(u+\lambda\bullet v) \\
[\varphi+\psi](u+\lambda\bullet v) &= \varphi(u)+\lambda\bullet\varphi(v)+\psi(u)+\lambda\bullet\psi(v) \quad \text{(par la propriété 3)} \\
[\varphi+\psi](u+\lambda\bullet v) &= \varphi(u)+\psi(u)+\lambda\bullet(\varphi(v)+\psi(v)) \\
[\varphi+\psi](u+\lambda\bullet v) &= [\varphi+\psi](u)+\lambda\bullet[\varphi+\psi](v)
\end{aligned}$$
— Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda\bullet\varphi$ est une fonction de E dans F.
De plus, pour $u, v \in E$ et $\mu \in \mathbb{K}$, on a :
$$\begin{aligned}
[\lambda\bullet\varphi](u+\mu\bullet v) &= \lambda\bullet\varphi(u+\lambda\bullet v) \\
[\lambda\bullet\varphi](u+\mu\bullet v) &= \lambda\bullet(\varphi(u)+\mu\bullet\varphi(v)) \qquad \text{(par la propriété 3)} \\
[\lambda\bullet\varphi](u+\mu\bullet v) &= \lambda\bullet\varphi(u)+\mu\bullet(\lambda\bullet(\varphi(v))) \\
[\lambda\bullet\varphi](u+\mu\bullet v) &= [\lambda\bullet\varphi](u)+\mu\bullet[\lambda\bullet\varphi](v)
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$. Donc, $\mathcal{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $\square$

En matrices :

Proposition 7

$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ muni de la somme de matrices et du produit externe est un espace vectoriel.

On voit que formuler en matrices peut économiser des lignes.

Comme nous allons parler beaucoup de matrices dans la suite, tout sera pris en dimension finie.

Définition 13

On note $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de dimension $n \times n$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_i^j)_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ j \in [\![1,n]\!]}}$$

Proposition 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. La matrice I_n représente l'endomorphisme Id_E de n'importe quelle base dans elle-même.

Démonstration. On prend un vecteur $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
I_n u &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \cdots + 0 \cdot u_n \\ 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + \cdots + 0 \cdot u_n \\ \vdots \\ 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \cdots + 1 \cdot u_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

On peut aussi comprendre que I_n est l'élément neutre pour la multiplication, comme l'identité est l'élément neutre de la composition.

Définition 14 – Matrice inversible

Soit A, une matrice carrée de dimension n. On dit que A est inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$A \times B = B \times A = I_n$$

B est appelé inverse de A et est noté A^{-1}.

On remarque la similitude avec la notion de fonction réciproque. Et en effet :

Proposition 9

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels de dimension n. Soit e et f respectivement des bases de E et F. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et A la matrice de φ dans les bases e et f. A est inversible si et seulement si φ est un isomorphisme de E dans F.

Démonstration. En exercice. □

Notation 2

On appelle « groupe linéaire » et on note $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ les matrices inversibles de dimension n.

Proposition 10

$(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe.

3.1 Retour sur les matrices de passage

On a vu qu'une matrice de passage permettait de réécrire un vecteur d'une base dans une autre base. Et passer un vecteur d'une base a à une base b, puis de la base b à une base c, c'est comme passer de a à c. En matrices, cela s'écrit :

Proposition 11

$$P_c^b P_b^a = P_c^a$$

Réécrire un vecteur d'une base dans elle même, c'est ne rien changer. En particulier, on peut répéter cette opération autant de fois qu'on veut, partout, sans altérer le résultat. Donc cette opération, c'est l'élément neutre. Sous forme de matrices, c'est l'identité.

Proposition 12

$$P_a^a = I_n$$

Cette opération est évidemment réversible : le vecteur exprimé dans la seconde base peut être réécrit dans la première. Sous forme matricielle, cela donne :

Proposition 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et e et e' deux bases de E.
La matrice $P_{e'}^e$ est inversible et son inverse est $P_e^{e'}$.

$$(P_{e'}^e)^{-1} = P_e^{e'}$$

Démonstration. En effet, si on prend un vecteur u dans la base e, qu'on le réécrit dans la base e', puis à nouveau dans e, on obtient à nouveau u. On a donc

$$P_{e'}^e \times P_e^{e'} = P_{e'}^{e'} = I_n$$

De la même façon, on justifie que

$$P_e^{e'} \times P_{e'}^e = P_e^e = I_n$$

Donc ces matrices sont bien inversibles et inverse l'une de l'autre. □

Définition 15 – Matrices équivalentes

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})^2$. On dit que A et B sont équivalentes s'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ inversibles telles que

$$B = Q^{-1}AP$$

A et B représentent le même morphisme dans des bases différentes.

Les matrices Q et P étant des matrices de passage.

Définition 16 – Matrices semblables

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. On dit que A et B sont semblables s'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles telle que

$$B = P^{-1}AP$$

C'est un cas particulier de l'équivalence dans lequel on force que les bases d'arrivée et de départ soient toujours les mêmes. C'est une notion beaucoup plus forte et intéressante.

Notation 3

Si A et B sont semblables, on note $A \sim B$.

Proposition 14

$\sim$ est une relation d'équivalence.

4 Exemples

4.1 Au marché

Reprenons notre exemple du marché. Vous avez des poireaux (en nombre) et du fromage (en masse) à acheter.

On aimerait savoir certaines données à propos de ces courses, la masse totale, le prix, le volume etc.. Vous imaginez que pour des vrais transporteurs, ce sont des données intéressantes.

Admettons que le poireau pèse 300g (on ne transporte que les blancs), vaut 0.3€ et occupe un volume de 0.5L. Le fromage lui est acheté en masse. Il pèse 1000g par kg, coûte 25€/kg pour un volume de 0.80L/kg (au pif).

La fonction qui donne ces trois quantités à partir du nombre de poireaux et de la masse de fromage est évidemment une fonction linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. On se place dans la base $\mathcal{B} = (1\text{ poireau}, 0\text{kg fromage}), (0\text{ poireau}, 1\text{kg fromage})$, qui est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Le panier ne comportant qu'un poireau est représenté par le vecteur $(1, 0)$. Le panier ne contenant qu'un kg de fromage est représenté par $(0, 1)$.

Dans le premier cas, les trois données qui nous intéressent sont $(300, 0.3, 0.5)$ et pour le second $(1000, 25, 0.8)$.

Aussi, cette application linéaire se représente par la matrice

$$A_B = \begin{pmatrix} 300 & 1000 \\ 0.3 & 25 \\ 0.5 & 0.8 \end{pmatrix}$$

En effet, si j'ai p poireaux et f kg de fromage dans le vecteur $u = \begin{pmatrix} p \\ f \end{pmatrix}$ on trouve

$$\begin{aligned} A_B u &= \begin{pmatrix} 300 & 1000 \\ 0.3 & 25 \\ 0.5 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 300p + 1000f \\ 0.3p + 25f \\ 0.5p + 0.8f \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui correspond bien à, respectivement, le poids total, le prix total et le volume total.

Maintenant, admettons que vous fassiez les courses pour vous et votre grand mère (qui ne peut plus sortir, vous êtes un brave petit-enfant !).

Vous mangez en moyenne 0.3 poireaux et 0.02 kg de fromage par jour. Quant à votre grand mère, c'est respectivement 2 et 0.01. Vous devez acheter assez de chaque choses pour x jours pour vous et y pour la grand mère (vous n'êtes pas le seul adorable petit enfant à lui faire ses courses).

Et vous aimeriez savoir le prix, la masse et le volume à prévoir en fonction de ces jours d'autonomie.

Ainsi, on cherche à changer de base. On veut que la base de départ de l'application soit $\mathcal{B}' = ((0.3, 0.02), (2, 0.01))$. On se convainc que c'est une base.

Pour obtenir $A_{B'}$ qui donne le prix, la masse et le volume pour chaque nombre de jour d'autonomie de vous et votre grand mère, il faut prendre un vecteur dans B', le réécrire dans B et appliquer A_B, c'est à dire

$$A_{B'} = A_B P_B^{B'}$$

Bon, cherchons $P_B^{B'}$. Ce sont les vecteurs de B' exprimé dans la base B. En d'autres termes, c'est la consommation quotidienne de chacun de vous exprimée dans la base canonique. On connaît déjà ça ! Pour $\mathcal{B}'_1$, c'est $(0.3, 0.02)$ et $\mathcal{B}'_2$ est $(2, 0.01)$. D'où

$$P_B^{B'} = \begin{pmatrix} 0.3 & 2 \\ 0.02 & 0.01 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{aligned}
A_{B'} &= A_B P_B^{B'} \\
&= \begin{pmatrix} 300 & 1000 \\ 0.3 & 25 \\ 0.5 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.3 & 2 \\ 0.02 & 0.01 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 300 \times 0.3 + 1000 \times 0.02 & 300 \times 2 + 1000 \times 0.01 \\ 0.3 \times 0.3 + 25 \times 0.02 & 0.3 \times 2 + 25 \times 0.01 \\ 0.5 \times 0.3 + 0.8 \times 0.02 & 0.5 \times 2 + 0.8 \times 0.01 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 90 + 20 & 600 + 10 \\ 0.09 + 0.5 & 0.6 + 0.25 \\ 0.15 + 0.16 & 1 + 0.008 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 110 & 610 \\ 0.59 & 0.85 \\ 0.31 & 1.008 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour avoir des réserves pour x jours pour vous et y jours pour votre grand mère, le vecteur (prix, masse, volume) est donné par :

$$\begin{pmatrix} 110 & 610 \\ 0.59 & 0.85 \\ 0.31 & 1.008 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Pour ceux que ça intéressent, il y a un problème basé sur ce genre de considérations qu'on appelle l'optimisation linéaire.

4.2 Symétrie par rapport à une droite

Ici, on veut étudier la symétrie s dont l'axe est la droite portée par le vecteur $(2,1)$.

Comme c'est en endomorphisme, on prend les mêmes bases de départ et d'arrivée.

On aimerait exprimer cette symétrie dans la base canonique, mais comme l'axe est de travers, ça tombe mal. Commençons par prendre une autre base. Dans la base $\mathcal{B} = ((2,1),(-1,2)) = (b_1,b_2)$, la symétrie s'effectue facilement. En effet $s(2,1) = (2,1)$ car $(2,1)$ est sur l'axe de symétrie et $s(-1,2) = (1,-2) = -(-1,2)$ car $(-1,2)$ est orthogonal à l'axe.

On a donc $s(b_1) = 1b_1 + 0b_2$ et $s(b_2) = 0b_1 - 1b_2$. On sait donc que la matrice de s dans $\mathcal{B}$ est

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Maintenant, cherchons $A_{\mathcal{B}'}$ où $\mathcal{B}'$ est la base canonique.

On a

$$A_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \times A_{\mathcal{B}} \times P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

$P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ sont les vecteurs de $\mathcal{B}$ exprimés dans $\mathcal{B}'$. Ce travail est déjà fait, c'est

$$P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Par contre $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ sont les vecteurs de la base canonique exprimés dans la base $\mathcal{B}$. Ce travail est plus délicat. Cependant, on se souvient que ${P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}}^{-1} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

On pose

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

et on sait que $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = I_n$.

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2a+b & -a+2b \\ 2c+d & -c+2d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc $a = 2b$ et $5b = 1$, donc $b = \frac{1}{5}$ et $a = \frac{2}{5}$. De même $-2c = d$ et $-5c = 1$ donc $c = -\frac{1}{5}$ et $d = \frac{2}{5}$.

Donc

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned}
A_{\mathcal{B}'} &= P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \times A_{\mathcal{B}} \times P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Modulo erreurs de calculs.

On a donc trouvé la matrice de s dans la base canonique.

On peut vérifier que cette matrice est vraisemblable. On sait que $s \circ s = Id_E$. Une symétrie est sa propre réciproque (on dit qu'elle est involutive). Vérifions ça sur la matrice. On sait que la matrice de $s \circ s$ dans $\mathcal{B}'$ est $A_{\mathcal{B}'}^2$.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3\times3+4\times4}{5} & \frac{3\times4-4\times3}{5} \\ \frac{4\times3-3\times4}{5} & \frac{4\times4+3\times3}{5} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ce qui est bien la matrice identité, ce qui est cohérent.

4.3 Rotation

On prend r l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui réalise une rotation de $\frac{\pi}{4}$ (un huitième de tour), dans le sens direct.

Dans la base canonique $((1,0),(0,1))$, on a $r(1,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$. $r(0,1) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$.

La matrice de r dans la base canonique est donc

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Testons, voir si c'est cohérent. $r \circ r$ est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et est représenté par A^2.

$$\begin{aligned}
A^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right)\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Allons encore deux fois pour avoir la rotation d'angle π (qui est aussi l'homothétie de rapport -1) :

$$\begin{aligned}
A^4 &= \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On trouve une symétrie par rapport aux deux axes de coordonnée. C'est la symétrie centrale de centre 0, c'est bien équivalent à une rotation d'angle π.

Puis le tour complet :

$$\begin{aligned}
A^8 &= \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On trouve la matrice identité, qui correspond bien au morphisme identité.

4.3.1 Rotation d'angle quelconque

Généralisons à un angle quelconque. Posons ρ la rotation d'angle θ.

On remarque sur la figure 1 que $\rho(e_1) = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$ et $\rho(e_2) = -\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2$.

Donc la matrice de ρ est

$$\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$$

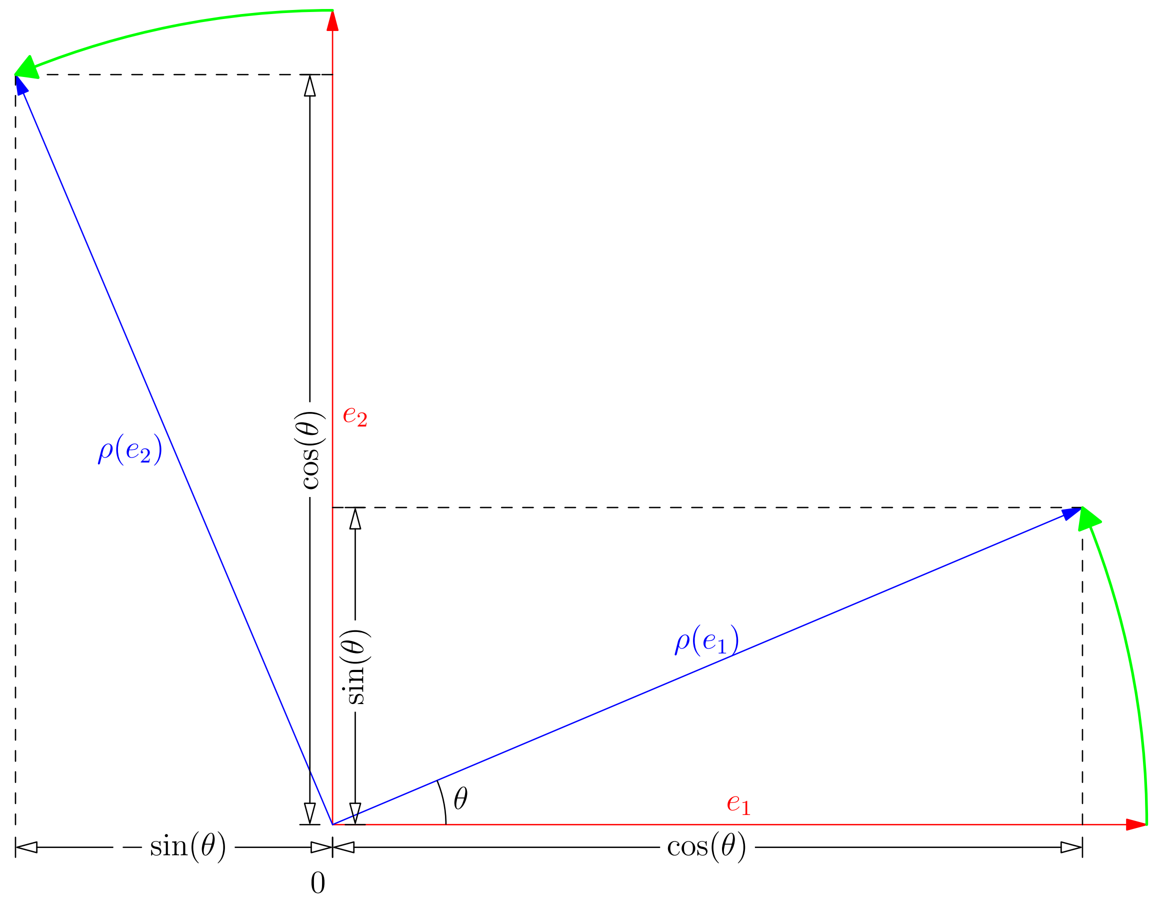

FIGURE 1 – Rotation d'angle θ

La rotation inverse de celle d'angle θ est la rotation d'angle $-\theta$, représentée par la matrice
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
grâce aux formules de trigo ($\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ et $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$).

5 Autres propriétés

Définition 17 – Noyau d'un morphisme

Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle noyau de u, qu'on note $\operatorname{Ker}(u)$ les antécédents de 0. C'est à dire

$$\operatorname{Ker}(u) = \{x \in E \mid u(x) = 0\} = u^{-1}(\{0\})$$

Le noyau est donc une partie de l'ensemble E.

Définition 18 – Noyau d'une matrice

Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On appelle noyau de A, qu'on note $\operatorname{Ker}(A)$ les antécédents de $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$. C'est à dire

$$\operatorname{Ker}(A) = \{x \in \mathcal{M}_{n,1} \mid Ax = 0\}$$

Le noyau est donc une partie de l'ensemble $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Proposition 15

Le noyau d'un morphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soit $(x, y) \in \operatorname{Ker}(\varphi)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Montrons que $x + \lambda \bullet y \in \operatorname{Ker}(\varphi)$.

On a

$$\begin{aligned} \varphi(x + \lambda \bullet y) &= \varphi(x) + \lambda \bullet \varphi(y) \\ &= 0 + \lambda \bullet 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $x + \lambda \bullet y \in \operatorname{Ker}(\varphi)$, donc le noyau est bien un sous espace vectoriel de E. $\square$

On peut donc se contenter de montrer qu'une partir de E est le noyau d'un morphisme pour savoir que c'est un sous-espace vectoriel. C'est une manière très compacte et pratique de prouver qu'un ensemble est un sous espace vectoriel.

Exemple 12

On prend $E = \mathbb{R}^3$. Montrer que l'ensemble $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 2y = 0\right\}$ est un sous espace vectoriel de E.
On peut prendre des triplets qui vérifient la condition et tenter de prouver que les combinaisons linéaires les vérifient aussi. Ou alors, on peut dire que l'ensemble des triplets qui vérifient $x + 2y = 0$, c'est le noyau de $(x,y,z) \mapsto x + 2y = 0$. Cette fonction est évidemment linéaire (de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$), donc F est un sous espace vectoriel de E.

Exemple 13

Soit E l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On se donne une équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$. Prouver que l'ensemble F des solutions est un espace vectoriel.
On peut réécrire l'équation $D \circ D(y) + aD(y) + by = 0$ ou $(D \circ D + aD + b\mathrm{Id}_E)(y) = 0$ avec D l'endomorphisme de dérivation. Or $(D \circ D + aD + b\mathrm{Id}_E)$ est linéaire en tant que somme et composée de fonction linéaires. Donc F est le noyau de cette application, donc est un sous espace vectoriel de E.

Soulignons que 0 appartient toujours au noyau, par conséquent, un noyau ne peut pas être vide.

Théorème 1

Soit $(E,+,\bullet)$ et $(F,+,\bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$.
φ est injective si et seulement si $\operatorname{Ker}(u) = \{0\}$.

Démonstration. Soit $(E,+,\bullet)$ et $(F,+,\bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$.

— ($\Rightarrow$) On suppose que φ est injective.
Soit $u \in E$ tel que $\varphi(u) = 0$.
On sait, par la propriété 1, que : $\varphi(0) = 0$.
On a donc $x \in E$ et $0 \in E$ et $\varphi(u) = \varphi(0)$.
Puis comme φ est injective, $u = 0$.

— ($\Leftarrow$) On suppose que pour tout $u \in E$ tel que $\varphi(u) = 0$, on a : $u = 0$.
Montrons que φ est injective :
Soient $x, y \in E$ tels que $\varphi(x) = \varphi(y)$. On a : $\varphi(x) - \varphi(y) = 0$.
Puis, par la propriété 2, $-\varphi(y) = \varphi(-y)$.
Donc, $\varphi(x) + \varphi(-y) = 0$.
Puis, par la définition 1.(1), $\varphi(x - y) = 0$.
Donc par hypothèse, $x - y = 0$.
Puis $x = y$.

$\square$

Reformulons avec des matrices :

Proposition 16

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. A est la matrice d'une application injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(A) = \{0\}$

Définition 19 – Image d'un morphisme

Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle image de u, qu'on note $\mathrm{Im}\,(u)$ l'ensemble des images de u. C'est à dire

$$\mathrm{Im}\,(u) = \{u(x) \in F \mid x \in E\} = u(E)$$

Le noyau est donc une partie de l'ensemble F.

Définition 20 – Image d'une matrice

Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On appelle image de A, qu'on note $\mathrm{Im}\,(A)$ l'ensemble des produits Ax. C'est à dire

$$\mathrm{Im}\,(A) = \{Ax \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}) \mid x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}$$

Le noyau est donc une partie de l'ensemble $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$.

Définition 21 – Rang

Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle rang de u, qu'on note $\mathrm{rg}\,(u)$ la dimension de son image.

$$\mathrm{rg}\,(u) = \dim(\mathrm{Im}\,(u))$$

On définit de la même façon le rang d'une matrice.

Proposition 17

Deux matrices de même taille sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

Par conséquent, l'équivalence ne nous apprend pas grand chose. Voilà pourquoi je disais que la similitude est une propriété beaucoup plus intéressante.

On a vu une condition d'injectivité. On peut utiliser l'image pour trouver une condition de surjectivité : $\text{Im}\,(u) = F$, ou alors $\text{rg}\,(u) = \dim F$. Mais ces deux notions sont liées.

Théorème 2 – Théorème du rang (morphismes)

Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\dim E = \text{rg}\,(u) + \dim \text{Ker}\,(u)$$

Théorème 3 – Théorème du rang (matrices)

Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

$$n = \text{rg}\,(A) + \dim \text{Ker}\,(A)$$

Essayons d'interpréter ça. E est l'ensemble de départ. On a vu que pour caractériser entièrement un morphisme, il faut donner l'image d'une base. Appelons n la dimension de E. J'ai donc n choix à faire : les images de chacun des vecteurs d'une base de E par u. Pour chacun des vecteurs e_i d'une base j'ai deux possibilités :

— Choisir un vecteur image f_i tel que $f_i \notin \text{Vect}\left((f_k)_{k \in [\![1, i-1]\!]}\right)$. On obtient alors une dimension d'image en plus.

— Choisir un vecteur image f_i tel que $f_i \in \text{Vect}\left((f_k)_{k \in [\![1, i-1]\!]}\right)$. Il existe donc une combinaisons linéaires des $i-1$ premiers f_k qui vaut f_i. La différence est donc nulle. Et par conséquent, on ajoute une dimension au noyau.

Pour chaque dimension de l'espace de départ, il faut faire une dimension de l'image ou du noyau.

Proposition 18

Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.

On note $n = \dim E$ et $m = \dim F$

— Si $n > m$, φ ne peut pas être injectif et le noyau est au moins de

dimension $n - m$.
- Si $n < m$, φ ne peut pas être surjectif et l'image est au plus de dimension n.
- Si φ est injective, alors $n \leqslant m$.
- Si φ est surjective, alors $n \geqslant m$.
- Si φ est bijective, alors $n = m$.

Tout ceci est bien commode pour comparer des espaces vectoriels. Mais on va surtout regarder le cas des endomorphismes.

5.1 Cas des endomorphismes

Proposition 19

Soit u un endomorphisme. Il y a équivalence entre.

1. u est bijectif
2. u est injectif
3. u est surjectif

Démonstration. On va utiliser principalement le théorème du rang.

(1 ⇒ 2) trivial.

(1 ⇒ 3) trivial.

(2 ⇒ 1) On suppose u injectif. Donc le noyau est réduit à $\{0\}$. Donc $\dim(\mathrm{Ker}\,(u)) = 0$. Donc $\mathrm{rg}\,(u) = \dim E$. Or, l'image de u est inclue dans E (puisque c'est un endomorphisme), et comme on a l'égalité des dimensions, on a bien $\mathrm{Im}\,(u) = E$, donc u est surjectif donc bijectif.

(3 ⇒ 1) On suppose u surjectif. On a donc $\mathrm{rg}\,(u) = \dim E$. Or, $\dim(\mathrm{Ker}\,(u)) = \dim E - \mathrm{rg}\,(u) = 0$, donc $\mathrm{Ker}\,(u) = \{0\}$, donc u est injectif, donc bijectif.

□

6 De l'inversion des matrices

On a vu que certaines matrices sont inversibles. On rappelle qu'une matrice carrée A est inversible s'il existe B de même taille telle que $AB = BA = I_n$. B est notée A^{-1} et est évidemment unique.

A est inversible si A est la matrice d'un endomorphisme bijectif, et A^{-1} est la matrice de l'endomorphisme réciproque.

Proposition 20

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible.

$$\forall (B,C) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, AB = AC \Rightarrow B = C$$
$$\forall (B,C) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, BA = CA \Rightarrow B = C$$

Démonstration. Il suffit de multiplier respectivement à gauche et à droite par A^{-1}. $\square$

On peut simplifier les matrices inversibles. À l'inverse, si une matrice peut toujours se simplifier, alors elle est inversible.

Proposition 21

$$\left(\forall (B,C) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, BA = CA \Rightarrow B = C\right) \Rightarrow A \text{ est inversible}$$

De plus, il suffit d'avoir un inverse d'un seul côté.

Proposition 22

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il y a équivalence entre

- A est inversible
- $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = I_n$
- $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), BA = I_n$

6.1 Méthode d'inversion

On se donne $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} AX &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc l'équation $AX = Y$ est équivalent au système

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = y_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n = y_n \end{cases}$$

Si on résout ce système en X, on finit par obtenir quelque chose comme

$$\begin{cases} b_{1,1}y_1 + \cdots + b_{1,n}y_n = x_1 \\ \vdots \\ b_{n,1}y_1 + \cdots + b_{n,n}y_n = x_n \end{cases}$$

Mais si on résout en matrice :

$$\begin{aligned} AX = Y &\Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}Y \\ &\Leftrightarrow A^{-1}Y = X \end{aligned}$$

Donc la matrice A^{-1} est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots\cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots\cdots & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

Allez, inversez en paix.

Exemple 14

Essayons d'inverser $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On sait que le déterminant est $ad - bc$. On suppose qu'il est non nul, de façon que la matrice soit inversible.

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} ax_1 + bx_2 = y_1 \\ cx_1 + dx_2 = y_2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} acx_1 + bcx_2 = cy_1 \\ acx_1 + adx_2 = ay_2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} acx_1 + bcx_2 = cy_1 \\ (ad - bc)x_2 = ay_2 - cy_1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} acx_1 + bcx_2 = cy_1 \\ \qquad\qquad x_2 = \dfrac{ay_2 - cy_1}{ad - bc} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} acx_1 = cy_1 + bc\dfrac{cy_1 - ay_2}{ad - bc} \\ \quad x_2 = \dfrac{ay_2 - cy_1}{ad - bc} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} acx_1 = \dfrac{adcy_1 - bc^2y_1 + bc^2y_1 - abcy_2}{ad - bc} \\ \quad x_2 = \dfrac{ay_2 - cy_1}{ad - bc} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{dy_1 - by_2}{ad - bc} \\ x_2 = \dfrac{-cy_1 + ay_2}{ad - bc} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

D'où $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.