Lois internes

Marc CHEVALIER
DI ENS
sur une idée originale de Jérôme FERET

2018-2019

1 Lois internes

Définition 1

Soit A un ensemble. Une loi interne sur A est une fonction de $A \times A$ dans A.

Notation 1

Si $\otimes$ est une loi interne sur l'ensemble A, alors, pour tous éléments x, y de l'ensemble A, l'élément $\otimes(x, y)$ est habituellement noté $x \otimes y$.

2 Associativité

Définition 2

Une loi interne $\otimes$ sur un ensemble A est dite associative si et seulement si, pour tous éléments x, y, z de l'ensemble A, on a : $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$.

3 Commutativité

Définition 3

Une loi interne $\otimes$ sur un ensemble A est dite commutative si et seulement si, pour tous éléments x, y de l'ensemble A, on a : $x \otimes y = y \otimes x$.

4 Élements neutres

Définition 4

Soit A un ensemble muni d'une loi interne $\otimes$.

1. un élément $\varepsilon_d \in A$ est un élément neutre à droite pour la loi $\otimes$ si et seulement si pour tout élément $x \in A$, on a $x \otimes \varepsilon_d = x$.
2. un élément $\varepsilon_g \in A$ est un élément neutre à gauche pour la loi $\otimes$ si et seulement si pour tout élément $x \in A$, on a $\varepsilon_g \otimes x = x$.
3. un élément $\varepsilon \in A$ est un élément neutre pour la loi $\otimes$ si et seulement si c'est un élément neutre à droite pour la loi $\otimes$ et un élément neutre à gauche pour la loi $\otimes$.

Proposition 1

Soit A un ensemble muni d'une loi interne $\otimes$. Si $\otimes$ admet un élément neutre, alors $\otimes$ admet un unique élément neutre.

5 Inverses

Définition 5

Soit $\otimes$ une loi interne sur un ensemble A qui admet un élément neutre ε et soit x, y deux éléments de A. On dit que :

1. y est un inverse à gauche de x si et seulement si $y \otimes x = \varepsilon$.
2. y est un inverse à droite de x si et seulement si $x \otimes y = \varepsilon$.
3. y est un inverse de x si et seulement si y est un inverse à droite de x, et un inverse à gauche de x.

Un élément $x \in A$ est dit inversible si et seulement si il admet un inverse.

Proposition 2

Soit A un ensemble, soit $\otimes$ une loi interne associative sur A, qui admet un élément neutre, et soit x un élément de A. Si l'élément x a un inverse à gauche pour $\otimes$, alors pour tous éléments y, z de l'ensemble A, si $x \otimes y = x \otimes z$ alors $y = z$.
On dit alors que l'élément x est simplifiable à gauche.

Proposition 3

Soit A un ensemble, soit $\otimes$ une loi interne associative sur A, qui admet un élément neutre ε et soit x un élément de A. Si $x \in A$ a un inverse à droite pour $\otimes$, alors pour tous élément y, z de l'ensemble A, si $y \otimes x = z \otimes x$ alors $y = z$.
On dit alors que l'élément x est simplifiable à droite.

Proposition 4

Soit $\otimes$ une loi interne associative sur un ensemble A, qui admet un élément neutre ε. Soit x un élément de A. On suppose l'existence de deux éléments $x_d, x_g \in A$ tels que x_d soit un inverse à droite de x et que x_d soit un inverse à gauche de x_g. Alors $x_d = x_q$ (et donc x est inversible).

Proposition 5

Soit $\otimes$ une loi interne associative sur un ensemble A, qui admet un élément neutre ε. Soit x un élément de A. Si l'élément x est inversible, alors il existe un unique élément $y \in A$ tel que $x \otimes y = \varepsilon$ et $y \otimes x = \varepsilon$.

Définition 6

Soit $\otimes$ une loi interne associative sur un ensemble A, qui admet un élément neutre ε. Si $x \in A$ est inversible, l'unique élément $y \in A$ tel que $x \otimes y = \varepsilon$ et $y \otimes x = \varepsilon$ est appelé inverse de x, et est noté x^{-1}.

Proposition 6

Soit A un ensemble, soit $\otimes$ une loi interne associative sur A, qui admet un élément neutre. Si l'élément x est inversible, alors son inverse est inversible et l'inverse de l'inverse de l'élément x est l'élément x.

Proposition 7

Soit A un ensemble, soit $\otimes$ une loi interne associative sur A, qui admet un élément neutre. Soient x et $y \in A$ deux élément inversibles. Alors $x \otimes y$ est inversible, de plus :

$$(x \otimes y)^{-1} = y^{-1} \otimes x^{-1}.$$

Proposition 8

Soit A un ensemble, soit $\otimes$ une loi interne associative et commutative sur A, qui admet un élément neutre. Soient x et $y \in A$ deux élément inversibles. Alors $x \otimes y$ est inversible, de plus :

$$(x \otimes y)^{-1} = x^{-1} \otimes y^{-1}.$$