Groupes, anneaux et corps

Marc CHEVALIER
DI ENS
sur une idée originale de Jérôme FERET

2018-2019

1 Groupes

Définition 1

Un groupe est une paire $(G, \times)$ telle que G soit un ensemble, et $\times$ soit une loi interne associative sur G qui admet un élément neutre, et telle que tout élément de x soit inversible.

Définition 2

Un groupe $(G, +)$ est dit abélien (ou commutatif), si la loi $+$ est commutative.

Notation 1

Lorsque $(G, +)$ est un groupe abélien, l'élément neutre est souvent noté 0_G et l'inverse d'un élément x est noté $-x$.

2 Anneaux

Définition 3

Un groupe est un triplet $(A, +, \times)$ tel que :
- $(A, +)$ est un groupe abélien,
- $\forall (a, b, c) \in A^3$,
  - $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ ($\times$ est associative),
  - $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ ($\times$ est distributive à gauche par

rapport à $+$),
  - $(b+c)\times a = b\times a + c\times a$ ($\times$ est distributive à droite par rapport à $+$),
- Il existe un élément $e_\times \in A$ qui est l'élément neutre (à gauche et à droite) de la loi $\times$ (aussi appelée élément unité). C'est à dire : $\forall a \in A, a\times e_\times = e_\times \times a = a$

Définition 4

Un anneau $(A,+,\times)$ est dit abélien (ou commutatif), si la loi $\times$ est commutative.

Exemple 1

Les triplets suivants sont des anneaux :
- $(\mathbb{Z},+,\times)$
- L'ensemble à un seul élément $\{0\}$ muni des opérations $0+0=0$ et $0\times 0=0$ est un anneau commutatif, appelé anneau nul, ou anneau trivial.
- L'ensemble des nombres de $[\![0,n-1]\!]$ avec les opérations $+$ et $\times$ modulo $n\in\mathbb{N}^*$. On note cet anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

3 Corps

Définition 5

Un coprs est un triplet $(K,+,\times)$ tel que :
- $(K,+,\times)$ est un anneau,
- $\forall x \in K\setminus\{0_K\}, \exists y\in K : x\times y = y\times x = 1_K$ (la loi $\times$ admet un inverse)

Dans la suite, on se donne un corps $(K,+,\times)$.

Proposition 1

$$\forall x\in K, 0\times x = x\times 0 = 0$$

On dit que 0 est absorbant pour la loi $\times$.

Exemple 2

Les triplets suivants sont des corps :

- $(\mathbb{Q}, +, \times)$
- $(\mathbb{R}, +, \times)$
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier.

Mais ne sont pas des corps :

- $(\mathbb{Z}, +, \times)$. En Effet, 2 n'a pas d'inverse pour $\times$ dans $\mathbb{Z}$.
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est un corps si et seulement si n est composé (non premier).