Espaces vectoriels

Marc Chevalier
DI ENS
sur une idée originale de Jérôme Feret

2018-2019

Dans la suite, $\mathbb{K}$ est un corps dont les lois sont notées $+$ et $\cdot$. Cependant, on s'intéressera aux cas où $\mathbb{K}$ est soit l'ensemble $\mathbb{Q}$, soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$.

1 Définition

Définition 1

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un triplet $(E, +, \bullet)$ tel que :

1. $(E, +)$ soit un groupe abélien, dont on note l'élément neutre 0_E ;
2. $\bullet$ soit une loi externe de $\mathbb{K} \times E$ dans E ;
3. pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $u, v \in E$ on ait :
   (a) $(\lambda + \mu) \bullet u = (\lambda \bullet u) + (\mu \bullet u)$;
   (b) $\lambda \bullet (u + v) = (\lambda \bullet u) + (\lambda \bullet v)$;
   (c) $\lambda \bullet (\mu \bullet u) = (\lambda \cdot \mu) \bullet u$;
   (d) $1 \bullet u = u$.

On notera en général l'élément neutre simplement 0. Le contexte permettant de différencier 0_E et $0_{\mathbb{K}}$.

Exemple 1

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration.

1. $(\mathbb{K}, +)$ est un groupe abélien ;
2. $\cdot$ est une loi de $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$;
3. pour tout $\lambda, \mu, u, u \in \mathbb{K}$, on a :
   (a) $(\lambda + \mu) \cdot u = (\lambda \cdot u) + (\mu \cdot u)$;
   (b) $\lambda \cdot (u + v) = (\lambda \cdot u) + (\lambda \cdot v)$;
   (c) $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \cdot \mu) \cdot u$;
   (d) $1 \cdot u = u$.

$\square$

Exemple 2

Soit n un entier et $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le triplet $(E^n, \dot{+}, \dot{\bullet})$ où $\dot{+}$ applique la loi $+$ composante par composante et $\dot{\bullet}$ applique la loi $\bullet$ composante par composante, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration. 1. Montrons que $(E^n, \dot{+})$ est un groupe abélien :
Soient $(u_i)_{1 \le i \le n}$, $(v_i)_{1 \le i \le n}$, et $(w_i)_{1 \le i \le n}$ trois familles à valeur dans E indexées par l'ensemble des entiers qui sont compris entre 1 et n.

(a) Montrons que $\dot{+}$ est bien une loi interne.
Pour $1 \le i \le n$, on a : $u_i + v_i \in E$ (car $+$ est une loi interne sur E), ainsi $(u_i)_{1 \le i \le n} \dot{+} (v_i)_{1 \le i \le n}$ est une famille à valeur dans E indexée par l'ensemble des entiers qui sont compris entre 1 et n.
Puis $\dot{+}$ est bien une loi interne.

(b) Montrons que $\dot{+}$ est associative.
Pour $1 \le i \le n$, on a :

$$\begin{aligned}
(((u_i)_{1\le i\le n} \dot{+} (v_i)_{1\le i\le n}) \dot{+} (w_i)_{1\le i\le n})_i &= ((u_i)_{1\le i\le n} \dot{+} (v_i)_{1\le i\le n})_i + w_i \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{+}) \\
(((u_i)_{1\le i\le n} \dot{+} (v_i)_{1\le i\le n}) \dot{+} (w_i)_{1\le i\le n})_i &= (u_i + v_i) + w_i \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{+}) \\
(((u_i)_{1\le i\le n} \dot{+} (v_i)_{1\le i\le n}) \dot{+} (w_i)_{1\le i\le n})_i &= u_i + (v_i + w_i) \\
&\quad \text{(car } + \text{ est associative dans } E) \\
(((u_i)_{1\le i\le n} \dot{+} (v_i)_{1\le i\le n}) \dot{+} (w_i)_{1\le i\le n})_i &= u_i + ((v_i)_{1\le i\le n} \dot{+} (w_i)_{1\le i\le n})_i \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{+}) \\
(((u_i)_{1\le i\le n} \dot{+} (v_i)_{1\le i\le n}) \dot{+} (w_i)_{1\le i\le n})_i &= ((u_i)_{1\le i\le n} \dot{+} ((v_i)_{1\le i\le n} \dot{+} (w_i)_{1\le i\le n}))_i \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{+})
\end{aligned}$$

Puis, $((u_i)_{1 \le i \le n} \dot{+} (v_i)_{1 \le i \le n}) \dot{+} (w_i)_{1 \le i \le n} = (u_i)_{1 \le i \le n} \dot{+} ((v_i)_{1 \le i \le n} \dot{+} (w_i)_{1 \le i \le n})$ et $\dot{+}$ est associative.

(c) Montrons que $\dot{+}$ est commutative.
Pour $1 \leq i \leq n$, on a :

$$\begin{aligned}
((u_i)_{1\leq i\leq n} \dot{+} (v_i)_{1\leq i\leq n})_i &= u_i + v_i \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{+}) \\
((u_i)_{1\leq i\leq n} \dot{+} (v_i)_{1\leq i\leq n})_i &= v_i + u_i \\
&\quad \text{(car + est commutative dans } E) \\
((u_i)_{1\leq i\leq n} \dot{+} (v_i)_{1\leq i\leq n})_i &= ((v_i)_{1\leq i\leq n} \dot{+} (u_i)_{1\leq i\leq n})_i \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{+})
\end{aligned}$$

Puis, $(u_i)_{1\leq i\leq n} \dot{+} (v_i)_{1\leq i\leq n} = (v_i)_{1\leq i\leq n} \dot{+} (u_i)_{1\leq i\leq n}$ et $\dot{+}$ est commutative.

(d) Montrons que $(0_E)_{1\leq i\leq n}$ est un élément neutre :
— On a : $0_E \in E$, puis, $(0_E)_{1\leq i\leq n} \in E^n$.
— Pour $1 \leq i \leq n$, on a :

$$\begin{aligned}
((u_i)_{1\leq i\leq n} \dot{+} (0_E)_{1\leq i\leq n})_i &= u_i + 0_E \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{+}) \\
((u_i)_{1\leq i\leq n} \dot{+} (0_E)_{1\leq i\leq n})_i &= u_i \\
&\quad \text{(car } 0_E \text{ est neutre pour } \dot{+} \text{ dans } E)
\end{aligned}$$

Puis, $(u_i)_{1\leq i\leq n} \dot{+} (0_E)_{1\leq i\leq n} = (u_i)_{1\leq i\leq n}$.
Donc $(0_E)_{1\leq i\leq n}$ est un élément neutre pour la loi $\dot{+}$.

(e) Montrons que $(-u_i)_{1\leq i\leq n}$ est l'inverse de $(u_i)_{1\leq i\leq n}$:
— Pour $1 \leq i \leq n$, on a : $-u_i \in E$ (car $(E, +)$ est un groupe et $u \in E$), puis $(-u_i)_{1\leq i\leq n} \in E^n$.
— Pour $1 \leq i \leq n$, on a :

$$\begin{aligned}
((u_i)_{1\leq i\leq n} \dot{+} (-u_i)_{1\leq i\leq n})_i &= u_i + (-u_i) \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{+}) \\
((u_i)_{1\leq i\leq n} \dot{+} (-u_i)_{1\leq i\leq n})_i &= (0_E)_{1\leq i\leq n i} \\
&\quad \text{(car } -u_i \text{ est l'inverse de } u_i)
\end{aligned}$$

Puis, $(u_i)_{1\leq i\leq n} \dot{+} (-u_i)_{1\leq i\leq n} = (0_E)_{1\leq i\leq n}$.
Donc $(-u_i)_{1\leq i\leq n}$ est l'inverse de $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ pour la loi $\dot{+}$.

Donc $(E^n, \dot{+})$ est un groupe abélien.

2. Montrons que $\dot{\bullet}$ est bien une loi externe.
Pour $1 \leq i \leq n$, on a : $\lambda \bullet u_i \in E$ (car $\bullet$ est une loi de $\mathbb{K} \times E$ dans E), ainsi $\lambda \dot{\bullet} (u_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille à valeur dans E indexée par l'ensemble des entiers qui sont compris entre 1 et n.
Puis $\dot{\bullet}$ est bien une loi externe.

3. (a) Montrons que $(\lambda+\mu) \dot{\bullet} (u_i)_{1\leq i\leq n} = (\lambda \dot{\bullet} (u_i)_{1\leq i\leq n}) \dot{+} (\mu \dot{\bullet} (u_i)_{1\leq i\leq n})$:
Pour $1 \leq i \leq n$, on a :

$$\begin{aligned}
((\lambda+\mu) \dot{\bullet} (u_i)_{1\leq i\leq n})_i &= (\lambda+\mu) \bullet u_i \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{\bullet}\text{)} \\
((\lambda+\mu) \dot{\bullet} (u_i)_{1\leq i\leq n})_i &= (\lambda \bullet u_i) + (\mu \bullet u_i) \\
&\quad \begin{pmatrix} \text{car } (E,+,\bullet) \text{ est un espace vectoriel} \\ \text{et par définition 1.(3a)} \end{pmatrix} \\
((\lambda+\mu) \dot{\bullet} (u_i)_{1\leq i\leq n})_i &= (\lambda \dot{\bullet} (u_i)_{1\leq i\leq n})_i + (\mu \dot{\bullet} (u_i)_{1\leq i\leq n})_i \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{\bullet}\text{)} \\
((\lambda+\mu) \dot{\bullet} (u_i)_{1\leq i\leq n})_i &= ((\lambda \dot{\bullet} (u_i)_{1\leq i\leq n}) \dot{+} (\mu \dot{\bullet} (v_i)_{1\leq i\leq n}))_i \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{+}\text{)}
\end{aligned}$$

Donc $(\lambda+\mu) \dot{\bullet} (u_i)_{1\leq i\leq n} = (\lambda \dot{\bullet} (u_i)_{1\leq i\leq n}) \dot{+} (\mu \dot{\bullet} (u_i)_{1\leq i\leq n})$.

(b) Montrons que $\lambda \dot{\bullet} ((u_i)_{1\leq i\leq n} \dot{+} (v_i)_{1\leq i\leq n}) = (\lambda \dot{\bullet} (u_i)_{1\leq i\leq n}) \dot{+} (\lambda \dot{\bullet} (v_i)_{1\leq i\leq n})$:
Pour $1 \leq i \leq n$, on a :

$$\begin{aligned}
(\lambda \dot{\bullet} ((u_i)_{1\leq i\leq n} \dot{+} (v_i)_{1\leq i\leq n}))_i &= \lambda \bullet ((u_i)_{1\leq i\leq n} \dot{+} (v_i)_{1\leq i\leq n})_i \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{\bullet}\text{)} \\
(\lambda \dot{\bullet} ((u_i)_{1\leq i\leq n} \dot{+} (v_i)_{1\leq i\leq n}))_i &= \lambda \bullet (u_i + v_i) \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{+}\text{)} \\
(\lambda \dot{\bullet} ((u_i)_{1\leq i\leq n} \dot{+} (v_i)_{1\leq i\leq n}))_i &= (\lambda \bullet u_i) + (\lambda \bullet v_i) \\
&\quad \begin{pmatrix} \text{car } (E,+,\bullet) \text{ est un espace vectoriel} \\ \text{et par définition 1.(3b)} \end{pmatrix} \\
(\lambda \dot{\bullet} ((u_i)_{1\leq i\leq n} \dot{+} (v_i)_{1\leq i\leq n}))_i &= (\lambda \dot{\bullet} (u_i)_{1\leq i\leq n})_i + (\lambda \dot{\bullet} (v_i)_{1\leq i\leq n})_i \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{\bullet}\text{)} \\
(\lambda \dot{\bullet} ((u_i)_{1\leq i\leq n} \dot{+} (v_i)_{1\leq i\leq n}))_i &= ((\lambda \dot{\bullet} (u_i)_{1\leq i\leq n}) \dot{+} (\lambda \dot{\bullet} (v_i)_{1\leq i\leq n}))_i \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{+}\text{)}
\end{aligned}$$

Donc $\lambda \dot{\bullet} ((u_i)_{1\leq i\leq n} \dot{+} (v_i)_{1\leq i\leq n}) = (\lambda \dot{\bullet} (u_i)_{1\leq i\leq n}) \dot{+} (\lambda \dot{\bullet} (v_i)_{1\leq i\leq n})$.

(c) Montrons que $\lambda \dot{\bullet} (\mu \dot{\bullet} (u_i)_{1\leq i\leq n}) = (\lambda \cdot \mu) \dot{\bullet} (u_i)_{1\leq i\leq n}$:

Pour $1 \leq i \leq n$, on a :

$$\begin{aligned}
(\lambda \dot{\bullet} (\mu \dot{\bullet} ((u_i)_{1\leq i\leq n})))_i &= \lambda \bullet (\mu \dot{\bullet} ((u_i)_{1\leq i\leq n}))_i \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{\bullet}) \\
(\lambda \dot{\bullet} (\mu \dot{\bullet} ((u_i)_{1\leq i\leq n})))_i &= \lambda \bullet (\mu \bullet u_i) \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{\bullet}) \\
(\lambda \dot{\bullet} (\mu \dot{\bullet} ((u_i)_{1\leq i\leq n})))_i &= (\lambda \cdot \mu) \bullet u_i \\
&\quad \left(\begin{array}{l}\text{car } (E, +, \bullet) \text{ est un espace vectoriel} \\ \text{et par définition 1.(3c)}\end{array}\right) \\
(\lambda \dot{\bullet} (\mu \dot{\bullet} ((u_i)_{1\leq i\leq n})))_i &= ((\lambda \cdot \mu) \dot{\bullet} (u_i)_{1\leq i\leq n})_i \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{\bullet})
\end{aligned}$$

Donc $\lambda \dot{\bullet} (\mu \dot{\bullet} (u_i)_{1\leq i\leq n}) = (\lambda \cdot \mu) \dot{\bullet} (u_i)_{1\leq i\leq n}$.

(d) Montrons que $1 \dot{\bullet} (u_i)_{1\leq i\leq n} = (u_i)_{1\leq i\leq n}$:
Pour $1 \leq i \leq n$, on a :

$$\begin{aligned}
(1 \dot{\bullet} (u_i)_{1\leq i\leq n})_i &= 1 \bullet u_i \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{\bullet}) \\
(1 \dot{\bullet} (u_i)_{1\leq i\leq n})_i &= ((u_i)_{1\leq i\leq n})_i \\
&\quad \left(\begin{array}{l}\text{car } (E, +, \bullet) \text{ est un espace vectoriel} \\ \text{et par définition 1.(3d)}\end{array}\right)
\end{aligned}$$

Puis, $1 \dot{\bullet} (u_i)_{1\leq i\leq n} = (u_i)_{1\leq i\leq n}$.

Ainsi $(E^n, \dot{+}, \dot{\bullet})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. □

Exemple 3

Soit A un ensemble et $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors $(\mathcal{F}(A, E), \dot{+}, \dot{\bullet})$ où $\mathcal{F}(A, E)$ est l'ensemble des fonctions de A dans E, $\dot{+}$ applique la loi $+$ point à point, et $\dot{\bullet}$ applique la loi $\bullet$ point à point est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration. 1. Montrons que $(E^A, \dot{+})$ est un groupe abélien :
Soient f, g, et h trois fonctions de A dans E.

(a) Montrons que $\dot{+}$ est bien une loi interne.
Pour $a \in A$, on a : $f(a) + g(a) \in E$ (car $+$ est une loi interne sur E), ainsi $f \dot{+} g$ est une fonction de A dans E.
Puis $\dot{+}$ est bien une loi interne.

(b) Montrons que $\dot{+}$ est associative.
Pour $a \in A$, on a :

$$\begin{aligned}
((f \dot{+} g) \dot{+} h)(a) &= (f \dot{+} g)(a) + h(a) \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{+}\text{)} \\
((f \dot{+} g) \dot{+} h)(a) &= (f(a) + g(a)) + h(a) \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{+}\text{)} \\
((f \dot{+} g) \dot{+} h)(a) &= f(a) + (g(a) + h(a)) \\
&\quad \text{(car } + \text{ est associative dans } E\text{)} \\
((f \dot{+} g) \dot{+} h)(a) &= f(a) + (g \dot{+} h)(a) \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{+}\text{)} \\
((f \dot{+} g) \dot{+} h)(a) &= (f \dot{+} (g \dot{+} h))(a) \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{+}\text{)}
\end{aligned}$$

Puis, $(f \dot{+} g) \dot{+} h = f \dot{+} (g \dot{+} h)$ et $\dot{+}$ est associative.

(c) Montrons que $\dot{+}$ est commutative.
Pour $a \in A$, on a :

$$\begin{aligned}
(f \dot{+} g)(a) &= f(a) + g(a) \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{+}\text{)} \\
(f \dot{+} g)(a) &= g(a) + f(a) \\
&\quad \text{(car } + \text{ est commutative dans } E\text{)} \\
(f \dot{+} g)(a) &= (g \dot{+} f)(a) \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{+}\text{)}
\end{aligned}$$

Puis, $f \dot{+} g = g \dot{+} f$ et $\dot{+}$ est commutative.

(d) Montrons que $[a \in A \mapsto 0_E \in E]$ est un élément neutre :
— On a : $0_E \in E$, puis, $[a \in A \mapsto 0_E \in E] \in E^A$.
— Pour $a \in A$, on a :

$$\begin{aligned}
(f \dot{+} [a \in A \mapsto 0_E \in E])(a) &= f(a) + [a \in A \mapsto 0_E \in E](a) \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{+}\text{)} \\
(f \dot{+} [a \in A \mapsto 0_E \in E])(a) &= f(a) + 0_E \\
(f \dot{+} [a \in A \mapsto 0_E \in E])(a) &= f(a) \\
&\quad \text{(car } 0_E \text{ est neutre pour } \dot{+} \text{ dans } E\text{)}
\end{aligned}$$

Puis, $f \dot{+} [a \in A \mapsto 0_E \in E] = f$.
Donc $[a \in A \mapsto 0_E \in E]$ est un élément neutre pour la loi $\dot{+}$.

(e) Montrons que $(\dot{-} f)$ est l'inverse de f :

— Pour $a \in A$, on a : on a $(\dot{-} f)(a) = -f(a)$ et $-f(a) \in E$ (car $(E, +)$ est un groupe et $f(a) \in E$), puis $\dot{-} f \in E^A$.

— Pour $a \in A$, on a :

$$\begin{array}{ll} (f \dot{+} (\dot{-} f))(a) = f(a) + ((\dot{-} f)(a)) & \text{(par définition de } \dot{+}) \\ (f \dot{+} (\dot{-} f))(a) = f(a) + (-f(a)) & \text{(par définition de } \dot{-}) \\ (f \dot{+} (\dot{-} f))(a) = 0_E & \text{(car } -f(a) \text{ est l'inverse de } f(a)) \\ (f \dot{+} (\dot{-} f))(a) = [a \in A \mapsto 0_E \in E](a) & \end{array}$$

Puis, $f \dot{+} (\dot{-} f) = [a \in A \mapsto 0_E \in E]$.

Donc $(\dot{-} f)$ est l'inverse de f pour la loi $\dot{+}$.

Donc $(E^A, \dot{+})$ est un groupe abélien.

2. Montrons que $\dot{\bullet}$ est bien une loi externe.
Pour $a \in A$, on a : $\lambda \bullet f(a) =\in E$ (car $\bullet$ est une loi de $\mathbb{K} \times E$ dans E), ainsi $\lambda \dot{\bullet} f$ est une fonction de A dans E.
Puis $\dot{\bullet}$ est bien une loi externe.

3. (a) Montrons que $(\lambda + \mu) \dot{\bullet} f = (\lambda \dot{\bullet} f) \dot{+} (\mu \dot{\bullet} f)$:
Pour $a \in A$, on a :

$$\begin{array}{ll} ((\lambda + \mu) \dot{\bullet} f)(a) & = (\lambda + \mu) \bullet f(a) \\ & \quad \text{(par définition de } \dot{\bullet}) \\ ((\lambda + \mu) \dot{\bullet} f)(a) & = (\lambda \bullet f(a)) + (\mu \bullet f(a)) \\ & \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } (E, +, \bullet) \text{ est un espace vectoriel} \\ \text{et par définition 1.(3a)} \end{array} \right) \\ ((\lambda + \mu) \dot{\bullet} f)(a) & = (\lambda \dot{\bullet} f)(a) + (\mu \dot{\bullet} f)(a) \\ & \quad \text{(par définition de } \dot{\bullet}) \\ ((\lambda + \mu) \dot{\bullet} f)(a) & = ((\lambda \dot{\bullet} f) \dot{+} (\mu \dot{\bullet} g))(a) \\ & \quad \text{(par définition de } \dot{+}) \end{array}$$

Donc $(\lambda + \mu) \dot{\bullet} f = (\lambda \dot{\bullet} f) \dot{+} (\mu \dot{\bullet} f)$.

(b) Montrons que $\lambda \dot{\bullet} (f \dot{+} g) = (\lambda \dot{\bullet} f) \dot{+} (\lambda \dot{\bullet} g)$:

Pour $a \in A$, on a :

$$\begin{aligned}
(\lambda \dot{\bullet} (f \dot{+} g))(a) &= \lambda \bullet (f \dot{+} g)(a) \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{\bullet}\text{)} \\
(\lambda \dot{\bullet} (f \dot{+} g))(a) &= \lambda \bullet (f(a) + g(a)) \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{+}\text{)} \\
(\lambda \dot{\bullet} (f \dot{+} g))(a) &= (\lambda \bullet f(a)) + (\lambda \bullet g(a)) \\
&\quad \left(\begin{array}{l} \text{car } (E, +, \bullet) \text{ est un espace vectoriel} \\ \text{et par définition 1.(3b)} \end{array} \right) \\
(\lambda \dot{\bullet} (f \dot{+} g))(a) &= (\lambda \dot{\bullet} f)(a) + (\lambda \dot{\bullet} g)(a) \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{\bullet}\text{)} \\
(\lambda \dot{\bullet} (f \dot{+} g))(a) &= ((\lambda \dot{\bullet} f) \dot{+} (\lambda \dot{\bullet} g))(a) \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{+}\text{)}
\end{aligned}$$

Donc $\lambda \dot{\bullet} (f \dot{+} g) = (\lambda \dot{\bullet} f) \dot{+} (\lambda \dot{\bullet} g)$.

(c) Montrons que $\lambda \dot{\bullet} (\mu \dot{\bullet} f) = (\lambda \cdot \mu) \dot{\bullet} f$:
Pour $a \in A$, on a :

$$\begin{aligned}
(\lambda \dot{\bullet} (\mu \dot{\bullet} (f)))(a) &= \lambda \bullet (\mu \dot{\bullet} (f))(a) \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{\bullet}\text{)} \\
(\lambda \dot{\bullet} (\mu \dot{\bullet} (f)))(a) &= \lambda \bullet (\mu \bullet f(a)) \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{\bullet}\text{)} \\
(\lambda \dot{\bullet} (\mu \dot{\bullet} (f)))(a) &= (\lambda \cdot \mu) \bullet f(a) \\
&\quad \left(\begin{array}{l} \text{car } (E, +, \bullet) \text{ est un espace vectoriel} \\ \text{et par définition 1.(3c)} \end{array} \right) \\
(\lambda \dot{\bullet} (\mu \dot{\bullet} (f)))(a) &= ((\lambda \cdot \mu) \dot{\bullet} f)(a) \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{\bullet}\text{)}
\end{aligned}$$

Donc $\lambda \dot{\bullet} (\mu \dot{\bullet} f) = (\lambda \cdot \mu) \dot{\bullet} f$.

(d) Montrons que $1 \dot{\bullet} f = f$:
Pour $a \in A$, on a :

$$\begin{aligned}
(1 \dot{\bullet} f)(a) &= 1 \bullet f(a) \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{\bullet}\text{)} \\
(1 \dot{\bullet} f)(a) &= (f)(a) \\
&\quad \left(\begin{array}{l} \text{car } (E, +, \bullet) \text{ est un espace vectoriel} \\ \text{et par définition 1.(3d)} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Puis, $1 \dot{\bullet} f = f$.

Ainsi $(E^A, \dot{+}, \dot{\bullet})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. □

Exemple 4

L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de l'addition point à point et de la multiplication point à point est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Démonstration. D'après l'exemple 1, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Puis, par l'exemple 1, $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \dot{+}, \dot{\cdot})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. $\square$

Exemple 5

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors $(E^{\mathbb{N}}, \dot{+}, \dot{\bullet})$ où $\dot{+}$ applique la loi $+$ composante par composante, et $\dot{\bullet}$ applique la loi $\bullet$ composante par composante est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration. 1. Montrons que $(E^{\mathbb{N}}, \dot{+})$ est un groupe abélien :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites d'entiers naturels.

(a) Montrons que $\dot{+}$ est bien une loi interne.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n + v_n \in E$ (car $+$ est une loi interne sur E), ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \dot{+} (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels.
Puis $\dot{+}$ est bien une loi interne.

(b) Montrons que $\dot{+}$ est associative.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$
\begin{aligned}
(((u_n)_{n\in\mathbb{N}} \dot{+} (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) \dot{+} (w_n)_{n\in\mathbb{N}})_n &= ((u_n)_{n\in\mathbb{N}} \dot{+} (v_n)_{n\in\mathbb{N}})_n + w_n \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{+}\text{)} \\
(((u_n)_{n\in\mathbb{N}} \dot{+} (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) \dot{+} (w_n)_{n\in\mathbb{N}})_n &= (u_n + v_n) + w_n \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{+}\text{)} \\
(((u_n)_{n\in\mathbb{N}} \dot{+} (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) \dot{+} (w_n)_{n\in\mathbb{N}})_n &= u_n + (v_n + w_n) \\
&\quad \text{(car } + \text{ est associative dans } E\text{)} \\
(((u_n)_{n\in\mathbb{N}} \dot{+} (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) \dot{+} (w_n)_{n\in\mathbb{N}})_n &= u_n + ((v_n)_{n\in\mathbb{N}} \dot{+} (w_n)_{n\in\mathbb{N}})_n \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{+}\text{)} \\
(((u_n)_{n\in\mathbb{N}} \dot{+} (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) \dot{+} (w_n)_{n\in\mathbb{N}})_n &= ((u_n)_{n\in\mathbb{N}} \dot{+} ((v_n)_{n\in\mathbb{N}} \dot{+} (w_n)_{n\in\mathbb{N}}))_n \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{+}\text{)}
\end{aligned}
$$

Puis, $((u_n)_{n\in\mathbb{N}} \dot{+} (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) \dot{+} (w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \dot{+} ((v_n)_{n\in\mathbb{N}} \dot{+} (w_n)_{n\in\mathbb{N}})$ et $\dot{+}$ est associative.

(c) Montrons que $\dot{+}$ est commutative.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
((u_n)_{n\in\mathbb{N}} \dot{+} (v_n)_{n\in\mathbb{N}})_n &= u_n + v_n \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{+}\text{)} \\
((u_n)_{n\in\mathbb{N}} \dot{+} (v_n)_{n\in\mathbb{N}})_n &= v_n + u_n \\
&\quad \text{(car } + \text{ est commutative dans } E\text{)} \\
((u_n)_{n\in\mathbb{N}} \dot{+} (v_n)_{n\in\mathbb{N}})_n &= ((v_n)_{n\in\mathbb{N}} \dot{+} (u_n)_{n\in\mathbb{N}})_n \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{+}\text{)}
\end{aligned}$$

Puis, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \dot{+} (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \dot{+} (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\dot{+}$ est commutative.

(d) Montrons que $(0_E)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément neutre :
— On a : $0_E \in E$, puis, $(0_E)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.
— Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
((u_n)_{n\in\mathbb{N}} \dot{+} (0_E)_{n\in\mathbb{N}})_n &= u_n + 0_E \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{+}\text{)} \\
((u_n)_{n\in\mathbb{N}} \dot{+} (0_E)_{n\in\mathbb{N}})_n &= u_n \\
&\quad \text{(car } 0_E \text{ est neutre pour } \dot{+} \text{ dans } E\text{)}
\end{aligned}$$

Puis, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \dot{+} (0_E)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Donc $(0_E)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément neutre pour la loi $\dot{+}$.

(e) Montrons que $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'inverse de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
— Pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $-u_n \in E$ (car $(E, +)$ est un groupe et $u \in E$), puis $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.
— Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
((u_n)_{n\in\mathbb{N}} \dot{+} (-u_n)_{n\in\mathbb{N}})_n &= u_n + (-u_n) \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{+}\text{)} \\
((u_n)_{n\in\mathbb{N}} \dot{+} (-u_n)_{n\in\mathbb{N}})_n &= (0_E)_{n\in\mathbb{N}n} \\
&\quad \text{(car } -u_n \text{ est l'inverse de } u_n\text{)}
\end{aligned}$$

Puis, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \dot{+} (-u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0_E)_{n\in\mathbb{N}}$.
Donc $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'inverse de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour la loi $\dot{+}$.

Donc $(E^{\mathbb{N}}, \dot{+})$ est un groupe abélien.

2. Montrons que $\dot{\bullet}$ est bien une loi externe.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $\lambda \bullet u_n \in E$ (car $\bullet$ est une loi de $\mathbb{K} \times E$ dans E), ainsi $\lambda \dot{\bullet} (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels.
Puis $\dot{\bullet}$ est bien une loi externe.

3. (a) Montrons que $(\lambda+\mu)\ \dot{\bullet}\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda\ \dot{\bullet}\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}})\ \dot{+}\ (\mu\ \dot{\bullet}\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}})$:
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$
\begin{aligned}
((\lambda+\mu)\ \dot{\bullet}\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}})_n &= (\lambda+\mu)\bullet u_n \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{\bullet}\text{)} \\
((\lambda+\mu)\ \dot{\bullet}\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}})_n &= (\lambda\bullet u_n)+(\mu\bullet u_n) \\
&\quad \begin{pmatrix} \text{car } (E,+,\bullet) \text{ est un espace vectoriel} \\ \text{et par définition 1.(3a)} \end{pmatrix} \\
((\lambda+\mu)\ \dot{\bullet}\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}})_n &= (\lambda\ \dot{\bullet}\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}})_n + (\mu\ \dot{\bullet}\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}})_n \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{\bullet}\text{)} \\
((\lambda+\mu)\ \dot{\bullet}\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}})_n &= ((\lambda\ \dot{\bullet}\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}})\ \dot{+}\ (\mu\ \dot{\bullet}\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}}))_n \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{+}\text{)}
\end{aligned}
$$

Donc $(\lambda+\mu)\ \dot{\bullet}\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda\ \dot{\bullet}\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}})\ \dot{+}\ (\mu\ \dot{\bullet}\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

(b) Montrons que $\lambda\ \dot{\bullet}\ ((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \dot{+}\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\lambda\ \dot{\bullet}\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}})\ \dot{+}\ (\lambda\ \dot{\bullet}\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}})$:
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$
\begin{aligned}
(\lambda\ \dot{\bullet}\ ((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \dot{+}\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}}))_n &= \lambda\bullet((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \dot{+}\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}})_n \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{\bullet}\text{)} \\
(\lambda\ \dot{\bullet}\ ((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \dot{+}\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}}))_n &= \lambda\bullet(u_n+v_n) \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{+}\text{)} \\
(\lambda\ \dot{\bullet}\ ((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \dot{+}\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}}))_n &= (\lambda\bullet u_n)+(\lambda\bullet v_n) \\
&\quad \begin{pmatrix} \text{car } (E,+,\bullet) \text{ est un espace vectoriel} \\ \text{et par définition 1.(3b)} \end{pmatrix} \\
(\lambda\ \dot{\bullet}\ ((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \dot{+}\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}}))_n &= (\lambda\ \dot{\bullet}\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}})_n + (\lambda\ \dot{\bullet}\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}})_n \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{\bullet}\text{)} \\
(\lambda\ \dot{\bullet}\ ((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \dot{+}\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}}))_n &= ((\lambda\ \dot{\bullet}\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}})\ \dot{+}\ (\lambda\ \dot{\bullet}\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}}))_n \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{+}\text{)}
\end{aligned}
$$

Donc $\lambda\ \dot{\bullet}\ ((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \dot{+}\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\lambda\ \dot{\bullet}\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}})\ \dot{+}\ (\lambda\ \dot{\bullet}\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

(c) Montrons que $\lambda\ \dot{\bullet}\ (\mu\ \dot{\bullet}\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\lambda\cdot\mu)\ \dot{\bullet}\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
(\lambda \dot{\bullet} (\mu \dot{\bullet} ((u_n)_{n\in\mathbb{N}})))_n &= \lambda \bullet (\mu \dot{\bullet} ((u_n)_{n\in\mathbb{N}}))_n \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{\bullet}\text{)} \\
(\lambda \dot{\bullet} (\mu \dot{\bullet} ((u_n)_{n\in\mathbb{N}})))_n &= \lambda \bullet (\mu \bullet u_n) \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{\bullet}\text{)} \\
(\lambda \dot{\bullet} (\mu \dot{\bullet} ((u_n)_{n\in\mathbb{N}})))_n &= (\lambda \cdot \mu) \bullet u_n \\
&\quad \left(\begin{array}{l}\text{car } (E, +, \bullet) \text{ est un espace vectoriel} \\ \text{et par définition 1.(3c)}\end{array}\right) \\
(\lambda \dot{\bullet} (\mu \dot{\bullet} ((u_n)_{n\in\mathbb{N}})))_n &= ((\lambda \cdot \mu) \dot{\bullet} (u_n)_{n\in\mathbb{N}})_n \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{\bullet}\text{)}
\end{aligned}$$

Donc $\lambda \dot{\bullet} (\mu \dot{\bullet} (u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\lambda \cdot \mu) \dot{\bullet} (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(d) Montrons que $1 \dot{\bullet} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
(1 \dot{\bullet} (u_n)_{n\in\mathbb{N}})_n &= 1 \bullet u_n \\
&\quad \text{(par définition de } \dot{\bullet}\text{)} \\
(1 \dot{\bullet} (u_n)_{n\in\mathbb{N}})_n &= ((u_n)_{n\in\mathbb{N}})_n \\
&\quad \left(\begin{array}{l}\text{car } (E, +, \bullet) \text{ est un espace vectoriel} \\ \text{et par définition 1.(3d)}\end{array}\right)
\end{aligned}$$

Puis, $1 \dot{\bullet} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ainsi $(E^{\mathbb{N}}, \dot{+}, \dot{\bullet})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. □

Proposition 1

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit u un élément de E. On a : $0 \bullet u = 0_E$.

Démonstration. Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit u un élément de E.
On a :

$$\begin{aligned}
0 \bullet u &= (0 \bullet u) + 0_E && \text{(car } 0_E \text{ est neutre)} \\
0 \bullet u &= (0 \bullet u) + ((0 \bullet u) + (-(0 \bullet u))) && \text{(car } -(0 \bullet u) \text{ est l'inverse de } 0 \bullet u\text{)} \\
0 \bullet u &= ((0 \bullet u) + (0 \bullet u)) + (-(0 \bullet u)) && \text{(par associativité)} \\
0 \bullet u &= ((0 + 0) \bullet u) + (-(0 \bullet u)) && \text{(Par la définition 1.(3a))} \\
0 \bullet u &= (0 \bullet u) + (-(0 \bullet u)) && \\
0 \bullet u &= 0_E && \text{(car } -(0 \bullet u) \text{ est l'inverse de } 0 \bullet u\text{)}
\end{aligned}$$

□

Proposition 2

Soit $(E,+,\bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, d'élément neutre 0_E et soit λ un élément de $\mathbb{K}$. On a : $\lambda \bullet 0_E = 0_E$.

Démonstration. Soit $(E,+,\bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit λ un élément de $\mathbb{K}$.

1. Si $\lambda = 0$, alors, par la propriété 1, $\lambda \bullet 0_E = 0_E$;
2. Sinon.
   Soit u un élément de E.
   On a :

$$
\begin{aligned}
\lambda\bullet 0_E + u &= (\lambda\bullet 0_E) + (1\bullet u) && \text{(par la définition 1.(3d))}\\
\lambda\bullet 0_E + u &= (\lambda\bullet 0_E) + ((\lambda \cdot \tfrac{1}{\lambda}) \bullet u) && \text{(car } \lambda \neq 0\text{)}\\
\lambda\bullet 0_E + u &= (\lambda\bullet 0_E) + (\lambda \bullet (\tfrac{1}{\lambda} \bullet u)) && \text{(par la définition 1.(3c))}\\
\lambda\bullet 0_E + u &= \lambda\bullet(0_E + (\tfrac{1}{\lambda}\bullet u)) && \text{(par la définition 1.(3b))}\\
\lambda\bullet 0_E + u &= \lambda\bullet(\tfrac{1}{\lambda} \bullet u) && \text{(car } 0_E \text{ est neutre)}\\
\lambda\bullet 0_E + u &= (\lambda \cdot \tfrac{1}{\lambda}) \bullet u && \text{(par la définition 1.(3c))}\\
\lambda\bullet 0_E + u &= 1\bullet u &&\\
\lambda\bullet 0_E + u &= u && \text{(par la définition 1.(3d))}
\end{aligned}
$$

   Donc $\lambda\bullet 0_E$ est un élément neutre.
   Puis $\lambda\bullet 0_E = 0_E$.

Dans les deux cas, on a : $\lambda\bullet 0_E = 0_E$. □

Proposition 3

Soit $(E,+,\bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit u un élément de E. On a : $(-1) \bullet u = -u$.

Démonstration. Soit $(E,+,\bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit u un élément de E. On a :

$$
\begin{aligned}
u + ((-1) \bullet u) &= (1 \bullet u) + ((-1) \bullet u) && \text{(par la définition 1.(3d))}\\
u + ((-1) \bullet u) &= (1 + (-1)) \bullet u && \text{(par la définition 1.(3a))}\\
u + ((-1) \bullet u) &= 0 \bullet 0_E &&\\
u + ((-1) \bullet u) &= 0_E && \text{(par la propriété 1)}
\end{aligned}
$$

Donc $(-1)\bullet u$ est l'inverse de u. □

Proposition 4

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit u un élément de E, et soit λ un élément de $\mathbb{K}$. Si $\lambda \bullet u = 0_E$, alors $u = 0_E$ ou $\lambda = 0$.

Démonstration. Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit u un élément de E, et soit λ un élément de $\mathbb{K}$. On suppose que $\lambda \bullet u = 0_E$.

1. Si $\lambda = 0$, alors $u = 0_E$ ou $\lambda = 0$.
2. Si $\lambda \neq 0$, alors :

$$\begin{array}{ll} u = 1 \bullet u & \text{(par la définition 1.(3d))} \\ u = (\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda) \bullet u & \text{(car } \lambda \neq 0) \\ u = \frac{1}{\lambda} \bullet (\lambda \bullet u) & \text{(par la définition 1.(3c))} \\ u = \frac{1}{\lambda} \bullet 0_E & \text{(car } \lambda \bullet u = 0_E) \\ u = 0_E & \text{(par la propriété 1).} \end{array}$$

   Puis $u = 0_E$ ou $\lambda = 0$.

Ainsi, dans les deux cas, on a : $u = 0_E$ ou $\lambda = 0$. □

2 Sous-espaces

Définition 2

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle sous-espace vectoriel de E tout sous-ensemble non vide $F \subseteq E$, tel que :

1. pour tout $u, v \in F$, $(u + v) \in F$;
2. pour tout $u \in F, \lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda \bullet u) \in F$.

Proposition 5

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F contient l'élément neutre 0_E de la loi $+$ définie sur E.

Démonstration. Par la définition 2, F est non vide.
Soit u un élément de F.
Par la définition 2.(2), comme $-1 \in \mathbb{K}$ et $u \in F$, on a : $(-1) \bullet u \in F$. Puis, par la définition, on a : 2.(1), $u + (-1) \bullet u \in F$. Mais, par la propriété 1, on a : $(-1) \bullet u = -u$. Puis, par la définition 2.(2), on a : $u + (-u) \in F$. Or comme E est un groupe, $u + (-u) = 0_E$, donc $0_E \in F$. □

Proposition 6

Soit F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, \bullet)$. On note $+_{|F}$ la loi interne qui associe à une paire (u, v) d'éléments dans F, l'élément $u + v$, et $\cdot_{|F}$ la loi externe qui associe à un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et à un élément $u \in F$, l'élément $\lambda \bullet u$. Alors $(F, +_{|F}, \cdot_{|F})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel d'élément neutre 0_E.

Démonstration. 1. Montrons que $(F, +_{|F})$ est un groupe abélien :
Soient u, v, et w trois éléments de F.

(a) Montrons que $+_{|F}$ est bien une loi interne.
On a : $u +_{|F} v = u +_{|F} v$ par définition de $+_{|F}$, or, $u + v \in F$ (par définition 2.(1) et comme $u \in F$ et $v \in F$), ainsi $u +_{|F} v$ est une élément de F.
Puis $+_{|F}$ est bien une loi interne.

(b) Montrons que $+_{|F}$ est associative.
On a :

$$\begin{aligned}
((u +_{|F} v) +_{|F} w) &= (u +_{|F} v) + w \\
&\quad \text{(par définition de } +_{|F}) \\
((u +_{|F} v) +_{|F} w) &= (u + v) + w \\
&\quad \text{(par définition de } +_{|F}) \\
((u +_{|F} v) +_{|F} w) &= u + (v + w) \\
&\quad \text{(car } + \text{ est associative dans } E) \\
((u +_{|F} v) +_{|F} w) &= u + (v +_{|F} w) \\
&\quad \text{(par définition de } +_{|F}) \\
((u +_{|F} v) +_{|F} w) &= (u +_{|F} (v +_{|F} w)) \\
&\quad \text{(par définition de } +_{|F})
\end{aligned}$$

Puis, $(u +_{|F} v) +_{|F} w = u +_{|F} (v +_{|F} w)$ et $+_{|F}$ est associative.

(c) Montrons que $+_{|F}$ est commutative.
On a :

$$\begin{aligned}
(u +_{|F} v) &= u + v \\
&\quad \text{(par définition de } +_{|F}) \\
(u +_{|F} v) &= v + u \\
&\quad \text{(car } + \text{ est commutative dans } E) \\
(u +_{|F} v) &= (v +_{|F} u) \\
&\quad \text{(par définition de } +_{|F})
\end{aligned}$$

Puis, $u +_{|F} v = v +_{|F} u$ et $+_{|F}$ est commutative.

(d) Montrons que 0_E est un élément neutre :

— D'après, la propriété 2, $0_E \in E$. puis, $0_E \in F$.
— On a :

$$\begin{aligned}(u +_{|F} 0_E) &= u + 0_E \\ &\quad \text{(par définition de } +_{|F}) \\ (u +_{|F} 0_E) &= u \\ &\quad \text{(car } 0_E \text{ est neutre pour } +_{|F} \text{ dans } E)\end{aligned}$$

Puis, $u +_{|F} 0_E = u$.
Donc 0_E est un élément neutre pour la loi $+_{|F}$.

(e) Montrons que $-u$ est l'inverse de u :
— On a $-u = (-1) \bullet u$, car $u \in E$, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et par la propriété 1. Puis comme $-1 \in \mathbb{K}$, et $u \in F$, par la définition 2.(2), on obtient : $-u \in F$.
— On a :

$$\begin{aligned}(u +_{|F} -u) &= u + (-u) \\ &\quad \text{(par définition de } +_{|F}) \\ (u +_{|F} -u) &= 0_E \\ &\quad \text{(car } -u \text{ est l'inverse de } u)\end{aligned}$$

Puis, $u +_{|F} (-u) = 0_E$.
Donc $-u$ est l'inverse de u pour la loi $+_{|F}$.

Donc $(F, +_{|F})$ est un groupe abélien.

2. Montrons que $\bullet_{|F}$ est bien une loi externe.
On a : $\lambda \bullet_{|F} u = \lambda \bullet u$ par définition de $\bullet_{|F}$, or, $\lambda \bullet u \in F$ (par définition 2.(2) et comme $u \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$), ainsi $\lambda \bullet_{|F} u$ est une élément de F.
Puis $\bullet_{|F}$ est bien une loi externe.

3. (a) Montrons que $(\lambda + \mu) \bullet_{|F} u = (\lambda \bullet_{|F} u) +_{|F} (\mu \bullet_{|F} u)$:
On a :

$$\begin{aligned}((\lambda + \mu) \bullet_{|F} u) &= (\lambda + \mu) \bullet u \\ &\quad \text{(par définition de } \bullet_{|F}) \\ ((\lambda + \mu) \bullet_{|F} u) &= (\lambda \bullet u) + (\mu \bullet u) \\ &\quad \left(\begin{array}{l}\text{car } (E, +, \bullet) \text{ est un espace vectoriel} \\ \text{et par définition 1.(3a)}\end{array}\right) \\ ((\lambda + \mu) \bullet_{|F} u) &= (\lambda \bullet_{|F} u) + (\mu \bullet_{|F} u) \\ &\quad \text{(par définition de } \bullet_{|F}) \\ ((\lambda + \mu) \bullet_{|F} u) &= ((\lambda \bullet_{|F} u) +_{|F} (\mu \bullet_{|F} v)) \\ &\quad \text{(par définition de } +_{|F})\end{aligned}$$

Donc $(\lambda + \mu) \bullet_{|F} u = (\lambda \bullet_{|F} u) +_{|F} (\mu \bullet_{|F} u)$.

(b) Montrons que $\lambda \bullet_{|F} (u +_{|F} v) = (\lambda \bullet_{|F} u) +_{|F} (\lambda \bullet_{|F} v)$:
On a :

$$\begin{aligned}
(\lambda \bullet_{|F} (u +_{|F} v)) &= \lambda \bullet (u +_{|F} v) \\
&\quad \text{(par définition de } \bullet_{|F}) \\
(\lambda \bullet_{|F} (u +_{|F} v)) &= \lambda \bullet (u + v) \\
&\quad \text{(par définition de } +_{|F}) \\
(\lambda \bullet_{|F} (u +_{|F} v)) &= (\lambda \bullet u) + (\lambda \bullet v) \\
&\quad \begin{pmatrix} \text{car } (E, +, \bullet) \text{ est un espace vectoriel} \\ \text{et par définition 1.(3b)} \end{pmatrix} \\
(\lambda \bullet_{|F} (u +_{|F} v)) &= (\lambda \bullet_{|F} u) + (\lambda \bullet_{|F} v) \\
&\quad \text{(par définition de } \bullet_{|F}) \\
(\lambda \bullet_{|F} (u +_{|F} v)) &= ((\lambda \bullet_{|F} u) +_{|F} (\lambda \bullet_{|F} v)) \\
&\quad \text{(par définition de } +_{|F})
\end{aligned}$$

Donc $\lambda \bullet_{|F} (u +_{|F} v) = (\lambda \bullet_{|F} u) +_{|F} (\lambda \bullet_{|F} v)$.

(c) Montrons que $\lambda \bullet_{|F} (\mu \bullet_{|F} u) = (\lambda \cdot \mu) \bullet_{|F} u$:
On a :

$$\begin{aligned}
(\lambda \bullet_{|F} (\mu \bullet_{|F} (u))) &= \lambda \bullet (\mu \bullet_{|F} (u)) \\
&\quad \text{(par définition de } \bullet_{|F}) \\
(\lambda \bullet_{|F} (\mu \bullet_{|F} (u))) &= \lambda \bullet (\mu \bullet u) \\
&\quad \text{(par définition de } \bullet_{|F}) \\
(\lambda \bullet_{|F} (\mu \bullet_{|F} (u))) &= (\lambda \cdot \mu) \bullet u \\
&\quad \begin{pmatrix} \text{car } (E, +, \bullet) \text{ est un espace vectoriel} \\ \text{et par définition 1.(3c)} \end{pmatrix} \\
(\lambda \bullet_{|F} (\mu \bullet_{|F} (u))) &= ((\lambda \cdot \mu) \bullet_{|F} u) \\
&\quad \text{(par définition de } \bullet_{|F})
\end{aligned}$$

Donc $\lambda \bullet_{|F} (\mu \bullet_{|F} u) = (\lambda \cdot \mu) \bullet_{|F} u$.

(d) Montrons que $1 \bullet_{|F} u = u$:
On a :

$$\begin{aligned}
(1 \bullet_{|F} u) &= 1 \bullet u \\
&\quad \text{(par définition de } \bullet_{|F}) \\
(1 \bullet_{|F} u) &= (u) \\
&\quad \begin{pmatrix} \text{car } (E, +, \bullet) \text{ est un espace vectoriel} \\ \text{et par définition 1.(3d)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Puis, $1 \bullet_{|F} u = u$.

Ainsi $(F, +_{|F}, \bullet_{|F})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. □

Proposition 7

Si $(E,+,\bullet)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $\{0_E\}$ et E sont deux sous-espaces vectoriels de E.

Démonstration. Soit $(E,+,\bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Montrons que $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de $(E,+,\bullet)$.
   (a) On a : $0_E \in \{0_E\}$ donc 0_E est non vide.
   (b) On a $0_E \in E$, donc $\{0_E\} \in E$.
   (c) Pour $u,v \in \{0_E\}$, on a $u = 0_E$ et $v = 0_E$. Puis, $u+v = 0_E + 0_E$. Or 0_E est un élément neutre pour la loi $+$ définie sur E, donc $u+v = 0_E$. D'où $u+v \in \{0_E\}$.
   (d) Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in E$, on a $u = 0_E$. Puis $\lambda \bullet u = \lambda \bullet 0_E$. Puis par la propriété 1, $\lambda \bullet u = 0_E$. D'où, $\lambda \bullet u \in \{0_E\}$.

   Donc $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de $(E,+,\bullet)$.
2. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $(E,+,\bullet)$.
   (a) On a : $0_E \in E$, donc E est non vide.
   (b) On a $E = E$ puis $E \subseteq E$.
   (c) Pour $u,v \in E$, on a $u+v \in E$ car $+$ est une loi interne.
   (d) Pour $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda \bullet u \in E$, car $\bullet$ est une loi externe.

   Donc E est un sous-espace vectoriel de $(E,+,\bullet)$.

$\square$

Proposition 8

Soit $(E,+,\bullet)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble non vide et soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriel de $(E,+,\bullet)$ indexée par I.
Alors l'interection $\bigcap_{i\in I} E_i$ de tous les sous-espaces E_i est un sous-espace de $(E,+,\bullet)$.

Démonstration. Soit $(E,+,\bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit I un ensemble non vide et soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriel de $(E,+,\bullet)$ indexée par I.

Montrons que $\bigcap_{i\in I} E_i$ est un sous-espace vectoriel de $(E,+,\bullet)$.

1. Soit $i \in I$,
   On a $0_E \in E_i$ (par la propriété 2).
   Donc $0_E \in \bigcap_{i \in I} E_i$.
2. Soit j un élément de l'ensemble I (car l'ensemble I est non vide).

   On a $E_j \subseteq E$ et $\bigcap_{i \in I} E_i \subseteq E_j$. Donc $\bigcap_{i \in I} E_i \subseteq E$.
3. Soit $u, v \in \bigcap_{i \in I} E_i$.
   Soit $i \in I$.
   On a : $u \in E_i$ et $v \in E_i$, donc, par la définition 2.(1), on a : $u + v \in E_i$.
   Donc $(u + v) \in \bigcap_{i \in I} E_i$.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in F \cap G$.
   Soit $i \in I$.
   On a : $u \in E_i$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, donc, par la définition 2.(2), on a : $\lambda \bullet u \in E_i$.
   Puis, $(\lambda \bullet u \in \bigcap_{i \in I} E_i$.

Ainsi, $\bigcap_{i \in I} E_i$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \bullet)$. $\square$

Proposition 9

Il existe un espace vectoriel $(E, +, \bullet)$ et deux sous-espaces vectoriels de $(E, +, \bullet)$ tels que leur union ne soit pas un sous-espace vectoriel de $(E, +, \bullet)$.

Démonstration. On se place dans $(\mathbb{R}^2, \dot{+}, \dot{\cdot})$.
Montrons que les ensembles F et G définis par $F := \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $G := \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $(\mathbb{R}^2, \overset{\bullet}{\dot{+}})$, mais $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^2, \dot{+}, \dot{\cdot})$.

1. (a) On a $F \subseteq \mathbb{R}^2$.

   (b) On a $(0, 0) \in F$, donc F est non vide.

   (c) Soient $u, v \in F$.
   Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $u = (x, 0)$ et $v = (y, 0)$.
   On a : $u \dot{+} v = (x + y, 0 + 0)$.
   Puis, $u \dot{+} v = (x + y, 0)$.
   Donc $u \dot{+} v \in F$.

   (d) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in F$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $u = (x, 0)$.
   On a : $\lambda \dot{\cdot} u = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot 0)$.

Puis $\lambda \dot{\cdot} u = (\lambda \cdot u, 0)$.
Donc $\lambda \dot{\cdot} u \in F$.

Donc F est un sous-espace vectoriel de $(E, \dot{+}, \dot{\cdot})$.

2. (a) On a $G \subseteq \mathbb{R}^2$.

   (b) On a $(0,0) \in G$, donc G est non vide.

   (c) Soient $u, v \in G$.
   Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $u = (0, x)$ et $v = (0, y)$.
   On a : $u \dot{+} v = (0 + 0, x + y)$.
   Puis, $u \dot{+} v = (0, x + y)$.
   Donc $u \dot{+} v \in G$.

   (d) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in G$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $u = (0, x)$.
   On a : $\lambda \dot{\cdot} u = (\lambda \cdot 0, \lambda \cdot x)$.
   Puis $\lambda \dot{\cdot} u = (0, \lambda \cdot u)$.
   Donc $\lambda \dot{\cdot} u \in G$.

   (e) On a : $(1,0) \in F$ et $(0,1) \in G$. Donc $(1,0) \in F \cup G$ et $(0,1) \in F \cup G$.
   On a : $(1,0) \dot{+} (0,1) = (1,1)$, et $(1,1) \notin F$ et $(1,1) \notin G$.
   Donc $(1,1) \notin F \cup G$. Donc $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

   Donc G est un sous-espace vectoriel de $(E, \dot{+}, \dot{\cdot})$.

□

Exemple 6

$\mathbb{K}$ et $\{0_{\mathbb{K}}\}$ sont les seuls sous-espaces vectoriels de $(\mathbb{K}, +, \bullet)$.

Démonstration. 1. Montrons que $\{0_{\mathbb{K}}\}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}, +, \bullet)$:

   (a) On a : $0_{\mathbb{K}} \in \{0_{\mathbb{K}}\}$, donc $\{0_{\mathbb{K}}\}$ est non vide.

   (b) On a : $0_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$, donc $\{0_{\mathbb{K}}\} \subseteq \mathbb{K}$.

   (c) Soient $u, v \in \{0_{\mathbb{K}}\}$.
   On a : $u = 0_{\mathbb{K}}$ et $v = 0_{\mathbb{K}}$.
   Puis, $u + v = 0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}$. D'où, $u + v = 0_{\mathbb{K}}$.
   Puis, $u + v \in \{0_{\mathbb{K}}\}$.

   (d) Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in \{0_{\mathbb{K}}\}$.
   On a : $u = 0_{\mathbb{K}}$.
   Puis, $\lambda \bullet u = 0 \bullet 0_{\mathbb{K}}$. D'où, en utilisant la propriété 1, $\lambda \bullet u = 0_{\mathbb{K}}$.
   Puis, $\lambda \bullet u \in \{0_{\mathbb{K}}\}$.

Donc, $\{0_{\mathbb{K}}\}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}, +, \bullet)$.

2. Montrons que $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}, +, \bullet)$:
   (a) On a : $0_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$, donc $\mathbb{K}$ est non vide.
   (b) On a : $\mathbb{K} = \mathbb{K}$, donc $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}$.
   (c) Soient $u, v \in \mathbb{K}$.
   Par la définition 1.(1), $u + v \in \mathbb{K}$.
   (d) Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in \{0_{\mathbb{K}}\}$.
   Par la définition 1.(2), $\lambda \bullet u \in \{0_{\mathbb{K}}\}$.

   Donc, $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}, +, \bullet)$.
3. Soit F un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}, +, \bullet)$.
   Montrons que $F = \{0_{\mathbb{K}}\}$ ou $F = \mathbb{K}$: Distinguons deux cas :
   — si il existe $x \in F$ tel $x \neq 0_E$,
   Alors pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda = 1 \cdot \lambda$.
   Puis $\lambda = (x \cdot \frac{1}{x}) \cdot \lambda$.
   Puis, comme $\cdot$ est associative et commutative, $\lambda = (\lambda \cdot \frac{1}{x}) \cdot x$.
   Donc, par la définition 2.(2), $\lambda \in F$.
   Puis $\mathbb{K} \subseteq F$.
   Or $F \subseteq \mathbb{K}$.
   Donc $F = \mathbb{K}$.
   — Par la propriété 2, $0_{\mathbb{K}} \in F$, on a : $F = \{0_{\mathbb{K}}\}$.
   Ainsi $\{0_{\mathbb{K}}\}$ et $\mathbb{K}$ sont les seuls sous-espaces vectoriels de $(\mathbb{K}, +, \cdot)$.

□

Exemple 7

L'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), \dot{+}, \dot{\bullet})$.

Démonstration. Montrons que l'ensemble des fonctions continues est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est bien une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. La fonction constante égale à zéro est une fonction continue de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}$ donc $\mathcal{C}(\mathcal{R}, \mathcal{R}) \neq \emptyset$.
3. La somme, point à point, de deux fonctions continues de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}$ est une fonction continue de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}$.
4. Le produit externe, point à point, d'une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par un scalaire dans $\mathbb{R}$ est bien une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Donc $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est bien un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(\mathbb{R}),\dot{+},\dot{\bullet})$ $\square$

Exemple 8

L'ensemble des suites réelles qui convergent est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\dot{+},\dot{\bullet})$.

Démonstration. Montrons que l'ensemble des suites réelles qui convergent est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui converge est bien une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. La suite constance égale à zéro converge.
3. La somme point à point de deux suites qui convergent, converge (vers la somme des deux limites).
4. Le produit externe d'une suite qui converge par un scalaire par un scalaire, converge (vers le produit entre le scalaire et la limite de la suite).

Donc l'ensemble des suites réelles qui convergent est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathbb{R}^(\mathbb{N}),\dot{+},\dot{\bullet})$. $\square$

Exemple 9

Si $(E,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors l'ensemble des suites à valeur dans E qui stationnent est un sous-espace vectoriel de $(E^{\mathbb{N}},\dot{+},\dot{\bullet})$.

Démonstration. Montrons que l'ensemble des suites réelles qui stationnent est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui stationne est bien une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. La suite constance égale à zéro stationne.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeur dans E, qui stationnent. Soit n_u et n_v deux entiers naturels tels que pour tout $n > n_u$, $u_n = u_{n_u}$ et pour tout $n > n_v$, $v_n = v_{n_v}$. On a pour $n > \max n_u, n_v$, $u_n + v_n = u_{n_u} + v_{n_v}$. Donc la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stationne.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite à valeur dans E, qui stationne. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. Soit n_u un entier naturel tel que pour tout $n > n_u$, $u_n = u_{n_u}$. On a pour $n > n_u$, $\lambda \bullet u_{n_u} = \lambda \bullet u_n$. Donc la suite $(\lambda \bullet u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stationne.

Donc l'ensemble des suites réelles qui stationnent est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathbb{R}^(\mathbb{N}),\dot{+},\dot{\bullet})$. $\square$

Exemple 10

L'ensemble des couples de fonctions (x, y) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que x et y soient dérivables et vérifient :

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \frac{\delta x(t)}{\delta t} = 2 \cdot x(t) - 3 \cdot y(t) \\ \frac{\delta y(t)}{\delta t} = 3 \cdot x(t) - 2 \cdot y(t), \end{cases}$$

est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel pour l'addition point à point composante par composante, et le produit externe point à point et composante par composante.

Montrons que l'ensemble des solutions dérivables du système :

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \frac{\delta x(t)}{\delta t} = 2 \cdot x(t) - 3 \cdot y(t) \\ \frac{\delta y(t)}{\delta t} = 3 \cdot x(t) - 2 \cdot y(t), \end{cases}$$

est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des paires de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition point à point et composante par composante, et du produit externe point à point et composante par composante.

1. Une solution de ce système est bien une paire de fonction dérivable.
2. La paire de fonction constante égale à 0 est solution.
3. Soit (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux solutions. x_1 et x_2 sont deux fonctions dérivables. Donc $x_1 \dot{+} x_2$ est une fonction dérivable. De même, $y_1 \dot{+} y_2$ est une fonction dérivable.
   De plus, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\delta(x_1 \dot{+} x_2)(t)}{\delta t} &= \frac{\delta x_1(t)}{\delta t} + \frac{\delta x_2(t)}{\delta t} \\ \frac{\delta(x_1 + x_2)(t)}{\delta t} &= 2 \cdot x_1(t) - 3 \cdot y_1(t) + 2 \cdot x_2(t) - 3 \cdot y_2(t) \\ \frac{\delta(x_1 + x_2)(t)}{\delta t} &= 2 \cdot (x_1(t) + x_2(t)) - 3 \cdot (y_1(t) + y_2(t)) \\ \frac{\delta(x_1 + x_2)(t)}{\delta t} &= 2 \cdot (x_1 \dot{+} x_2)(t) - 3 \cdot (y_1 \dot{+} y_2)(t) \end{aligned}$$

   et :

$$\begin{aligned} \frac{\delta(y_1 \dot{+} y_2)(t)}{\delta t} &= \frac{\delta y_1(t)}{\delta t} + \frac{\delta y_2(t)}{\delta t} \\ \frac{\delta(y_1 + y_2)(t)}{\delta t} &= 3 \cdot x_1(t) - 2 \cdot y_1(t) + 3 \cdot x_2(t) - 2 \cdot y_2(t) \\ \frac{\delta(y_1 + y_2)(t)}{\delta t} &= 3 \cdot (x_1(t) + x_2(t)) - 2 \cdot (y_1(t) + y_2(t)) \\ \frac{\delta(y_1 + y_2)(t)}{\delta t} &= 3 \cdot (x_1 \dot{+} x_2)(t) - 2 \cdot (y_1 \dot{+} y_2)(t) \end{aligned}$$

Donc la paire $(x_1 \dot{+} x_2, y_1 \dot{+} y_2)$ est une solution dérivable du système :

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \frac{\delta x(t)}{\delta t} = 2 \cdot x(t) - 3 \cdot y(t) \\ \frac{\delta y(t)}{\delta t} = 3 \cdot x(t) - 2 \cdot y(t), \end{cases}$$

4. Soit (x, y) une solution et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. x est une fonction dérivable. Donc $\lambda \dot{\cdot} x$ est une fonction dérivable. De même, $\lambda \dot{\cdot} y$ est une fonction dérivable.
   De plus, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\delta(\lambda \dot{\cdot} x)(t)}{\delta t} &= \lambda \cdot \frac{x(t)}{\delta t} \\ \frac{\delta(\lambda \dot{\cdot} x)(t)}{\delta t} &= \lambda \cdot (2 \cdot x(t) - 3 \cdot y(t)) \\ \frac{\delta(\lambda \dot{\cdot} x)(t)}{\delta t} &= 2 \cdot (\lambda \cdot x(t)) - 3 \cdot (\lambda \cdot y(t)) \\ \frac{\delta(\lambda \dot{\cdot} x)(t)}{\delta t} &= 2 \cdot (\lambda \dot{\cdot} x)(t) - 3 \cdot (\lambda \dot{\cdot} y)(t) \end{aligned}$$

   et :

$$\begin{aligned} \frac{\delta(\lambda \dot{\cdot} y)(t)}{\delta t} &= \lambda \cdot \frac{y(t)}{\delta t} \\ \frac{\delta(\lambda \dot{\cdot} y)(t)}{\delta t} &= \lambda \cdot (3 \cdot x(t) - 2 \cdot y(t)) \\ \frac{\delta(\lambda \dot{\cdot} y)(t)}{\delta t} &= 2 \cdot (\lambda \cdot x(t)) - 2 \cdot (\lambda \cdot y(t)) \\ \frac{\delta(\lambda \dot{\cdot} y)(t)}{\delta t} &= 2 \cdot (\lambda \dot{\cdot} x)(t) - 2 \cdot (\lambda \dot{\cdot} y)(t) \end{aligned}$$

   Donc la paire $(\lambda \dot{\cdot} x, \lambda \dot{\cdot} y)$ est une solution dérivable du système :

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \frac{\delta x(t)}{\delta t} = 2 \cdot x(t) - 3 \cdot y(t) \\ \frac{\delta y(t)}{\delta t} = 3 \cdot x(t) - 2 \cdot y(t), \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions dérivables du système :

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \frac{\delta x(t)}{\delta t} = 2 \cdot x(t) - 3 \cdot y(t) \\ \frac{\delta y(t)}{\delta t} = 3 \cdot x(t) - 2 \cdot y(t), \end{cases}$$

est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des paires de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition point à point et composante par composante, et du produit externe point à point et composante par composante.

3 Sous-espaces engendrés

Définition 3

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit $(\lambda_i, u_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie de n couples dans $\mathbb{K} \times E$.
On définit les sommes partielles S_i pour $0 \leq i \leq n$ par :

$$\begin{cases} S_0 = 0_E \\ S_k = S_{k-1} + \lambda_k \bullet u_k \quad \text{pour } 1 \leq k \leq i \end{cases}$$

On appelle combinaison linéaire de la famille $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ par les coefficients de la famille $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$, le vecteur $S_n \in E$.

Démonstration. Par récurrence sur k compris entre 0 et n, on montre que la somme partielle S_k est bien définie et que $S_k \in E$.

— On a : $S_0 = 0_E$. Puis S_0 est bien définie et $S_0 \in E$.

— Supposons qu'il existe k un entier tel que $0 \leq k < n$, et tel que S_k soit bien définie et $S_k \in E$. Alors $S_k \in E$. De plus, $\lambda_{k+1} \in \mathbb{K}$ et $u_{k+1} \in E$. Donc par la définition 1.(2), $\lambda_{k+1} \bullet u_{k+1} \in E$. Puis, par la définition 1.(1), $S_k + \lambda_{k+1} \bullet u_{k+1}$ est bien défini et est un élément de E.

Donc par récurrence, la somme S_n est bien définie et est un élément de E. □

Notation 1

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On note :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bullet u_i,$$

la combinaison linéaire de la famille $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ par les coefficients de la famille $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Proposition 10

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, n un entier naturel, $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'éléments de E, $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$, et σ une bijection de l'ensemble des entiers entre 1 et n dans lui-même.
Alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bullet u_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{\sigma(i)} \bullet u_{\sigma(i)}.$$

Démonstration. Par induction (longue preuve), en utilisant l'associativité et la commutativité de la loi $+$ □

Notation 2

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble fini et $(\lambda_i, u_i)_{i \in I} \in (\mathbb{K} \times E)^I$ une famille de couple dans $\mathbb{K} \times E$ indexée par I. On note :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \bullet u_i := \sum_{k=1}^{n} \lambda_{\sigma(k)} \bullet u_{\sigma(k)}.$$

où n est le cardinal de i, et σ une bijection de I dans $\{k \mid 1 \leq k \leq n\}$.

Théorème 1

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $A \subseteq E$ une partie de E. Il existe un ensemble F tel que :

- F soit un sous-espace de $(E, +, \bullet)$;
- A soit un sous-ensemble de E ;
- pour tout sous-espace G de $(E, +, \bullet)$ tel que $A \subseteq G$, on ait $F \subseteq G$.

L'ensemble F est alors appelé le sous-espace de $(E, +, \bullet)$ engendré par A.

Démonstration. On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $(E, +, \bullet)$ qui contiennent A. On sait que $\mathcal{G}$ est non vide. En effet, par la propriété 2, E est un sous-espace de E et comme $A \subseteq E$, on a : $E \in \mathcal{G}$. On définit $\bigcap \mathcal{G} := \{u \in E \mid \forall F \in \mathcal{G},\ u \in G\}$.

1. Montrons que $A \subseteq \bigcap \mathcal{G}$.
   Soit $u \in A$.
   Soit $G \in \mathcal{G}$, par définition, on a : $A \subseteq G$, donc $u \in G$.
   Puis $u \in \bigcap \mathcal{G}$.
2. D'après la propriété 2, l'ensemble $\bigcap \mathcal{G}$ est un sous-espace de E.
3. Soit G' un autre sous-espace vectoriel de E contenant A. Montrons que $\bigcap \mathcal{G} \subseteq G'$.
   Soit $u \in \bigcap \mathcal{G}$. Par définition, on a : $G' \in \mathcal{G}$, donc $u \in G'$.
   Puis $\bigcap \mathcal{G} \subseteq G'$.

$\square$

Notation 3

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A une partie de E. Le sous-espace de $(E, +, .)$ engendré par A est noté $Vect(A)$.

Théorème 2

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A une partie de E. Alors :

$$Vect(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bullet u_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, (u_i) \in A^n, (\lambda_i) \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

Démonstration. On note $F := \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bullet u_i \mid n \in \mathbb{N}, (u_i) \in A^n, (\lambda_i) \in \mathbb{K}^n\}$. Montrons que F satisfait les hypothèses du théorème 3.

1. Soit $a \in A$. Par la définition 1.(3d), on a $a = 1 \bullet a$. Posons, $a_1 :== a$ et $\lambda_1 :== 1$. On a : $a = \sum_{i \in \{1\}} \lambda_i \bullet a_i$. Puis $a \in F$.
   Donc $A \subseteq F$.
2. Montrons que F est un sous-espace de $(E,+,\bullet)$.
   (a) On a $0_E = \sum_{i \in \emptyset} \_ \bullet \_$. Donc F n'est pas vide.
   (b) Soit $u, u' \in F$. Soit n, n' deux entiers, $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(\lambda'_i)_{1 \leq i \leq n'}$ deux familles de scalaires dans $\mathbb{K}$ et $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(u'_i)_{1 \leq i \leq n'}$ deux familles de vecteurs dans A, tel que : $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bullet u_i$ et $u' = \sum_{i=1}^{n'} \lambda'_i \bullet u'_i$. Nous notons $n'' := n + n'$. $(\lambda''_i)_{1 \leq i \leq n''}$ la famille de scalaires dans $\mathbb{K}$ définie par :
   $$\lambda''_i = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } i \leq n \\ \lambda'_{i-n} & \text{sinon,} \end{cases}$$
   et $(u''_i)_{1 \leq i \leq n''}$ la famille d'élément de A, définie par :
   $$u''_i = \begin{cases} u_i & \text{si } i \leq n \\ u'_{i-n} & \text{sinon,} \end{cases}$$
   On a, par associativité, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bullet u_i + \sum_{i=1}^{n'} \lambda'_i \bullet u'_i = \sum_{i=1}^{n''} \lambda''_i \bullet u''_i$. Puis $u + u' \in F$.
   (c) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire et soit $u \in F$ un élément.
3. Montrons maintenant que F le plus petit sous espace vectoriel de E qui contient A.
   Prennons G un sous-espace vectoriel de E qui contient l'ensemble A. Prennons u un élément de F. Nous voullons montrer que u est aussi un éléménet de G.

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel, $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de n scalaires dans $\mathbb{K}$, et $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de n vecteurs de A tel que $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bullet u_i$.
Montrons par récurrence que pour tout entier naturel k entre 0 et n, la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \bullet u_i$ est un élément de G.

— Pour $k = 0$.
  Nous avons $\sum_{i=1}^{0} \lambda_i \bullet u_i = 0_E$ et $0_E \in G$ (d'après la propriété 2).

— Supposons qu'il existe un entier k_0 entre 0 et $n-1$ tel que $\sum_{i=1}^{k_0} \lambda_i \bullet u_i$ soit élément de G.
  Nous avons $\lambda_{k_0+1} \in \mathbb{K}$ et $u_{k_0+1} \in A$.
  Or $A \subseteq G$, donc $\lambda_{k_0+1} \in \mathbb{K}$ et $u_{k_0+1} \in G$.
  Comme G est un sous-espace vectoriel, $\lambda_{k_0+1} \bullet u_{k_0+1} \in G$.
  Puis comme G est un sous-espace vectoriel et que $\sum_{i=1}^{k_0} \lambda_i \bullet u_i$, $\left(\sum_{i=1}^{k_0} \lambda_i \bullet u_i\right) + \lambda_{k_0+1} \bullet u_{k_0+1} \in G$.

  Or $\sum_{i=1}^{k_0+1} \lambda_i \bullet u_i = \left(\sum_{i=1}^{k_0} \lambda_i \bullet u_i\right) + \lambda_{k_0+1} \bullet u_{k_0+1}$.

  Donc $\sum_{i=1}^{k_0+1} \lambda_i \bullet u_i \in G$.

Ainsi par récurrence, la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bullet u_i$ est un élément de G.

Puis $u \in G$.

Donc $F \subseteq G$.

□

Remarque 1

Si F est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, \bullet)$, alors $Vect(F) = F$.

Démonstration. Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit F un sous-espace vectoriel de E.

— Par définition, on a $F \subseteq Vect(F)$.
  De plus, on a :
  1. $F \subseteq F$;
  2. F est un sous-espace vectoriel ;
  3. et $F \subseteq E$.

Or $Vect(F)$ est un sous-ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent F.
D'où $Vect(F) \subseteq F$.

Puis $Vect(F) = F$. $\square$

Exemple 11

Si $(E, +, \bullet)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $\{0_E\}$ est le sous-espace de $(E, +, \bullet)$ engendré par $\{0_E\}$; de plus, E est le sous-espace vectoriel engendré par E.

Démonstration. D'après la propriété 2, $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de $(E, +, \bullet)$. Puis par la remarque 3, on a : $Vect(\{0_E\}) = \{0_E\}$ et $Vect(E) = E$. $\square$

Exemple 12

Le sous-espace de $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\bullet})$ engendré par $\{(1,0,0)\}$ est $\{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Démonstration.

1. Montrons que : $\{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq Vect(\{(1,0,0)\})$.
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On a : $(\lambda, 0, 0) = \lambda \dot{\bullet} (1,0,0)$.
   Donc $(\lambda, 0, 0)$ est une combinaison linéaire d'éléments de $\{(1,0,0)\}$.
   Puis, par le théorème 3, $(\lambda, 0, 0) \in Vect(\{(1,0,0)\})$.
   D'où, $\{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \in Vect(\{(1,0,0)\})$.
2. Montrons que : $Vect(\{(1,0,0)\}) \in \{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   Pour cela, il suffit de montrer que $\{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\bullet})$ qui contient $\{(1,0,0)\}$.

   (a) On a pour $\lambda = 1$, $(\lambda, 0, 0) = (1,0,0)$, donc $\{(1,0,0)\} \subseteq \{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

   (b) Montrons que $\{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\bullet})$.

      i. On a : $\{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \neq \emptyset$, puisque $(1,0,0) \in \{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

      ii. On a : $\{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}$.

iii. Soient $u, v \in \{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $u = (\lambda, 0, 0)$ et $v = (\mu, 0, 0)$.
On a : $u \dot{+} v = (\lambda + \mu, 0, 0)$ et $\lambda + \mu \in \mathbb{R}$.
D'où : $u \dot{+} v \in \{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

iv. Soit $u \in \{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit $\mu \in \mathbb{R}$, tel que $u = (\mu, 0, 0)$.
On a : $\lambda \dot{\bullet} u = (\lambda \cdot \mu, 0, 0)$ et $\lambda \cdot \mu \in \mathbb{R}$.
D'où : $\lambda \dot{\bullet} u \in \{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Donc $\{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\bullet})$.

Puis par le théorème 3, on a : $Vect(\{(1, 0, 0)\}) \subseteq \{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Puis $Vect(\{(1, 0, 0)\}) = \{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. $\square$

Exemple 13

Le sous-espace de $(\mathbb{K}^3, \dot{+}, \dot{\bullet})$ engendré par $\{(1, 1, 0)\}$ est $\{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Démonstration. 1. Montrons que : $\{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq Vect(\{(1, 1, 0)\})$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a : $(\lambda, \lambda, 0) = \lambda \dot{\bullet} (1, 1, 0)$.
Donc $(\lambda, \lambda, 0)$ est une combinaison linéaire d'éléments de $\{(1, 1, 0)\}$.
Puis, par lé théorème 3, $(\lambda, \lambda, 0) \in Vect(\{(1, 1, 0)\})$.
D'où, $\{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \in Vect(\{(1, 1, 0)\})$.

2. Montrons que : $Vect(\{(1, 1, 0)\}) \in \{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Pour cela, il suffit de montrer que $\{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\bullet})$ qui contient $\{(1, 1, 0)\}$.

(a) On a pour $\lambda = 1$, $(\lambda, \lambda, 0) = (1, 1, 0)$, donc $\{(1, 1, 0)\} \subseteq \{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

(b) Montrons que $\{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\bullet})$.

i. On a : $\{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \neq \emptyset$, puisque $(1, 1, 0) \in \{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

ii. On a : $\{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}$.

iii. Soient $u, v \in \{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $u = (\lambda, \lambda, 0)$ et $v = (\mu, \mu, 0)$.
On a : $u \dot{+} v = (\lambda + \mu, \lambda + \mu, 0)$ et $\lambda + \mu \in \mathbb{R}$.
D'où : $u \dot{+} v \in \{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

iv. Soit $u \in \{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit $\mu \in \mathbb{R}$, tel que $u = (\mu, \mu, 0)$.
On a : $\lambda \dot{\bullet} u = (\lambda \cdot \mu, \lambda \cdot \mu, 0)$ et $\lambda \cdot \mu \in \mathbb{R}$.
D'où : $\lambda \dot{\bullet} u \in \{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Donc $\{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\bullet})$.

Puis par le théorème 3, on a : $Vect(\{(1,1,0)\}) \subseteq \{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Puis $Vect(\{(1,1,0)\}) = \{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. □

Exemple 14

Le sous-espace de $(\mathbb{K}^3, \dot{+}, \dot{\bullet})$ engendré par $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$ est $\{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$.

Démonstration. 1. Montrons que : $\{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \subseteq Vect(\{(1,0,0), (0,1,0)\})$.
Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
On a : $(\lambda, \mu, 0) = \lambda \dot{\bullet} (1,0,0) \dot{+} \mu \dot{\bullet} (0,1,0)$.
Donc $(\lambda, \mu, 0)$ est une combinaison linéaire d'éléments de $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$.
Puis, par le théorème 3, $(\lambda, \mu, 0) \in Vect(\{(1,0,0), (0,1,0)\})$.
D'où, $\{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \in Vect(\{(1,0,0), (0,1,0)\})$.

2. Montrons que : $Vect(\{(1,0,0), (0,1,0)\}) \in \{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
Pour cela, il suffit de montrer que $\{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\bullet})$ qui contient $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$.

   (a) On a pour $\lambda = 1$ et $\mu = 0$, $(\lambda, \mu, 0) = (1,0,0)$, donc $\{(1,0,0)\} \subseteq \{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
   (b) On a pour $\lambda = 0$ et $\mu = 1$, $(\lambda, \mu, 0) = (0,1,0)$, donc $\{(0,1,0)\} \subseteq \{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
   (c) Montrons que $\{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\bullet})$.
      i. On a : $\{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \neq \emptyset$, puisque $(1,0,0) \in \{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
      ii. On a : $\{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}$.
      iii. Soient $u, u' \in \{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
      Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $u = (\lambda, \mu, 0)$.
      Soient $\lambda', \mu' \in \mathbb{R}$ tels que $u' = (\lambda', \mu', 0)$.
      On a : $u \dot{+} u' = (\lambda + \lambda', \mu + \mu', 0)$ et $\lambda + \lambda' \in \mathbb{R}$ et $\mu + \mu' \in \mathbb{R}$.
      D'où : $u \dot{+} u' \in \{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

iv. Soit $u \in \{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ et $\nu \in \mathbb{R}$.
Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tel que $u = (\lambda, \mu, 0)$.
On a : $\nu \dot{\bullet} u = (\nu \cdot \lambda, \nu \cdot \mu, 0)$ et $\nu \cdot \lambda \in \mathbb{R}$ et $\nu \cdot \mu \in \mathbb{R}$.
D'où : $\nu \dot{\bullet} u \in \{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Donc $\{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\bullet})$.

Puis par le théorème 3, on a : $Vect(\{(1,0,0),(0,1,0)\}) \subseteq \{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Puis $Vect(\{(1,0,0),(0,1,0)\}) = \{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. □

Exemple 15

Pour $k \in \mathbb{N}$, δ^k est la suite définie par :

$$\begin{cases} \delta^k_n = 1 & \text{si } k = n \\ \delta^k_n = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le sous-espace de $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \dot{+}, \dot{\cdot})$ engendré par les suites $\{\delta^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ qui stationnent en 0.

Démonstration. — ($\subseteq$) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Vect(\{\delta^k \mid k \in \mathbb{N}\})$.
Par la définition 3, on peut choisir I un sous ensemble fini de $\mathbb{N}$ et $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une famille de scalaires indexée par I, tel que $(u_n) = \sum_{i\in I} \lambda_i \dot{\cdot} \delta^i$.
Comme I est une partie finie de $\mathbb{N}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \in I, i < n_0$.
Puis, pour $n > n_0$, on a : $u_n = \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot \delta^i_n$; or pour $i \in I$, on a : $i < n_0$, puis $i \neq n_0$. Donc $u_n = 0$.
Ainsi, (u_n) stationne en 0.

— ($\supseteq$) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui stationne en 0.
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ un indice tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n = 0$.
On prend $I = \{i \mid 1 \leq i \leq n_0\}$ et la famille $(\lambda_k)_{k\in I} \in \mathbb{K}^I$ de scalaires indexée par I définie par $\lambda_i := u_i$, pour $i \in I$.
On considère la suite $\sum_{i\in I} \lambda_i \dot{\cdot} \delta^i$.
Pour $n \in \mathbb{N}$,
— si $n \leq n_0$,
on a : $(\sum_{i\in I} \lambda_i \dot{\cdot} \delta^i)_n = \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot \delta^i_n$; puis, $(\sum_{i\in I} \lambda_i \dot{\cdot} \delta^i)_n = \lambda_n$; puis, $(\sum_{i\in I} \lambda_i \dot{\cdot} \delta^i)_n = u_n$.
— si $n > n_0$,
on a : $u_n = 0$ et pour $i \in I$, $\delta^i_n = 0$, donc $(\sum_{i\in I} \lambda_i \dot{\cdot} \delta^i)_n = 0$; puis $(\sum_{i\in I} \lambda_i \dot{\cdot} \delta^i)_n = u_n$.

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot \delta^i$.
Puis, $(u_n) \in Vect(\{\delta^k \mid k \in \mathbb{N}\})$.

$\square$