Familles de vecteurs

Marc Chevalier
DI ENS
sur une idée originale de Jérôme Feret

2018-2019

1 Familles libres

Définition 1

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est dite libre si et seulement si pour tout ensemble fini $J \subseteq I$ et toute famille de scalaire $(\lambda_j)_{j\in J}$, on a :

$$\sum_{j\in J} \lambda_j \bullet u_j = 0_E \Leftrightarrow \forall j \in J, \lambda_j = 0.$$

Définition 2

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f une famille d'éléments de E. On dit que f est liée si et seulement si elle n'est pas libre.

Remarque 1

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble fini. Une famille $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ d'éléments de E est libre si et seulement si pour tout toute famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$, on a :

$$\sum_{i\in I} \lambda_i \bullet u_I = 0_E \Leftrightarrow \forall i \in I, \lambda_j = 0.$$

Démonstration. Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble fini. Une famille $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ d'éléments de E.

— ($\Rightarrow$) Si $(u_i)_{i\in I}$ est libre.
I est un sous-ensemble fini de I.
Puis par la définition 1, pour tout toute famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$, on a : $\sum_{i\in I} \lambda_i \bullet u_i = 0_E \Leftrightarrow \forall i \in I, \lambda_j = 0$.

— ($\Leftarrow$) On suppose que pour tout toute famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$, on a : $\sum_{i\in I} \lambda_i \bullet u_i = 0_E \Leftrightarrow \forall i \in I, \lambda_j = 0$.
Soit J un sous ensemble fini de I.
Soit $(\lambda_j)_{j\in J} \in \mathbb{K}^J$ une famille de scalaire.
On pose pour $i \in I \setminus J$, $\lambda_i = 0$.
On a :

$$\forall j \in J,\ \lambda_j = 0 \Leftrightarrow \forall i \in I,\ \lambda_i = 0,$$

puisque pour tout $i \in I \setminus J$, $\lambda_i = 0$. Et, par hypothèse,

$$\forall i \in I, \lambda_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i\in I} \lambda_i \bullet u_i = 0_E.$$

Donc :

$$\forall j \in J,\ \lambda_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{i\in I} \lambda_i \bullet u_i = 0_E$$

Or :

$$\sum_{i\in I} \lambda_i \bullet u_i = \sum_{j\in J} \lambda_j \bullet u_j$$

Donc :

$$\forall j \in J,\ \lambda_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{j\in J} \lambda_j \bullet u_j = 0_E.$$

Puis, par la définition 1, $(u_i)_{i\in I}$ est une famille libre.

□

Proposition 1

Si $(E, +, \bullet)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors les familles libres ne contiennent pas l'élément 0_E.

Démonstration. Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble et $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. On suppose qu'il existe un indice $i_0 \in I$ tel que $u_{i_0} = 0_E$. Alors $1 \bullet u_{i_0}$ est une combinaison linéaire d'éléments de $(u_i)_{i\in I}$ avec un coefficient non nul (1). Or $1 \bullet u_{i_0} = 1 \bullet 0_E$, puis, $1 \bullet u_{i_0} = 0_E$. Donc la famille $(u_i)_{i\in I}$ est liée dans E. □

Exemple 1

Si $(E, +, \bullet)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors toute famille formée d'un élément de $E \setminus \{0_E\}$ est libre.

Démonstration. Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un singleton $\{i_0\}$ et $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'un élément de E indexée par I. On suppose que $u_{i_0} \neq 0_E$. Soit $J \subseteq I$, et $(\lambda_j)_{j \in J} \in E^J$ une famille de scalaires indexée par J telle que $\sum_{j \in J} \lambda_j \bullet u_j = 0_E$.

1. Si $J = \emptyset$, alors pour tout $j \in J$, $\lambda_j = 0$.
2. Sinon, $J = \{i_0\}$, puis, $\lambda_{i_0} \bullet u_{i_0} = 0_E$. Donc, $\lambda_{i_0} = 0$ ou $u_{i_0} = 0_E$, puis, comme $u_{i_0} \neq 0_E$, $\lambda_{i_0} = 0$.

Donc dans tous les cas, pour tout $j \in J$, $\lambda_j = 0$.
Puis, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre. □

Exemple 2

La famille $((1, 1, 0), (-1, 1, 0))$ est libre dans $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\cdot})$.

Démonstration. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda \dot{\cdot} (1, 1, 0) \dot{+} \mu \dot{\cdot} (-1, 1, 0) = (0, 0, 0)$.
On a sur la première coordonnée : $\lambda - \mu = 0$;
et sur la seconde coordonnée : $\lambda + \mu = 0$.
Ainsi :

$$\begin{cases} \lambda - \mu = 0 \\ \lambda + \mu = 0. \end{cases}$$

Puis par substitution :

$$\begin{cases} \lambda = \mu \\ 2 \cdot \mu = 0. \end{cases}$$

Puis :

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0. \end{cases}$$

Ainsi la famille $((1, 1, 0), (-1, 1, 0))$ est libre dans $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\cdot})$. □

Exemple 3

La famille $((1, 1, 0), (-1, 1, 0), (2, 3, 0))$ est liée dans $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\cdot})$.

Démonstration. On a :

$$(-5)\dot{\cdot}(1,1,0)+(-1)\dot{\cdot}(-1,1,0)+2\dot{\cdot}(2,3,0) = ((-5)+(-1)\cdot(-1)+2\cdot 2,(-5)+(-1)+2\cdot 3$$
$$(-5)\dot{\cdot}(1,1,0)+(-1)\dot{\cdot}(-1,1,0)+2\dot{\cdot}(2,3,0) = (-5+1+4,-5-1+6,0)$$
$$(-5)\dot{\cdot}(1,1,0)+(-1)\dot{\cdot}(-1,1,0)+2\dot{\cdot}(2,3,0) = (0,0,0)$$

Donc la famille $((1,1,0),(-1,1,0),(2,3,0))$ est liée. □

Exemple 4

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $(\mathbb{K}^n, \dot{+}, \dot{\cdot})$. l'espace vectoriel des n-uplets de scalaires, muni de l'addition et la multiplication coordonnée par coordonnée. La famille $(\delta^k)_{1\leq k\leq n}$ de vecteurs telle que δ_k a toutes ses coordonnées égales à 0, sauf la k-ième coordonnée qui vaut 1 est libre.

Démonstration. Soit $(\lambda_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^n$ une famille de scalaires telle que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \dot{\cdot} \delta^k = (0)_{1\leq k\leq n}$. Soit $j \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq j \leq n$, on a sur la j-ième coordonnée, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \delta_j^k = 0$. Or $\delta_j^k = 0$ pour tout k tel que $j \neq k$. Puis $\lambda_k \cdot 1 = 0$ et $\lambda_k = 0$. Donc la famille $(\delta^k)_{1\leq k\leq n}$ est libre. □

Proposition 2

Soit $(E,+,\bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille libre d'éléments de E indexée par I. Soit J un sous ensemble de I. Alors, la famille $(u_j)_{j\in J}$ est libre.

Démonstration. Soit $(E,+,\bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble et $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille libre d'éléments de E indexée par I. Soit J un sous ensemble de I.
Montrons que $(u_j)_{j\in J}$ est une famille libre.
Soit K un sous ensemble fini de J et $(\lambda_k)_{k\in K} \in \mathbb{K}^K$ une famille de scalaires indexée par K. Comme $J \subseteq I$, K est un sous ensemble fini de I. Donc, par la définition 1, $\sum_{k\in K} \lambda_k \bullet u_k = 0_E \Leftrightarrow \forall k \in K, \lambda_k = 0$. Puis, par la définition 1, la famille $(u_j)_{j\in J}$ est libre. □

Proposition 3

Soit $(E,+,\bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit σ une bijection de I dans

I. Soit $(v_i)_{i\in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_i := u_{\sigma(i)}. \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est libre.

Démonstration. Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit σ une bijection de I dans I. Soit $(v_i)_{i\in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_i := u_{\sigma(i)}. \end{cases}$$

— $(\Rightarrow)$ On suppose que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est libre.
Montrons que la famille $(v_i)_{i\in I}$ est libre.
Soit J un sous-ensemble fini de I et $(\lambda_j)_{j\in J} \in \mathbb{K}^J$ une famille de scalaires indexée par J tel que : $\sum_{j\in J} \lambda_j \bullet v_j = 0_E$. Il faut montrer que pour tout $j \in J$, $\lambda_j = 0$.
Pour $j \in J$, on a : $v_j = u_{\sigma j}$.
Donc $\sum_{j\in J} \lambda_j \bullet u_{\sigma j}$. Puis, comme σ est une bijection, on peut faire le changement de variable $j' = \sigma(j)$. D'où $\sum_{j'\in\{\sigma(j) \mid j\in J\}} \lambda_{\sigma^{-1}(j')} \bullet u_{j'}$. Or l'ensemble $\{\sigma(j) \mid j \in J\}$ est fini et la famille $(u_i)_{i\in I}$ est libre, donc par la définition 1, on a : pour $j' \in \{\sigma(j) \mid j \in J\}$, $\lambda_{\sigma^{-1}(j')} = 0$. Puis en posant $j \in J$, $\lambda_{\sigma^{-1}(\sigma(j))} = 0$, et $\lambda_j = 0$.
Ainsi, par la définition 1, la famille $(v_i)_{i\in I}$ est libre.

— $(\Leftarrow)$ On suppose que la famille $(v_i)_{i\in I}$ est libre.
Alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ en appliquant le point précédent en remplaçant $(u_i)_{i\in I}$ par $(v_i)_{i\in I}$ et réciproquement, puis en remplaçant σ par σ^{-1}.

$\square$

Proposition 4

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda \neq 0$ et $i_0 \in I$ un élément de I. Soit $(v_i)_{i\in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} := \lambda \bullet u_{i_0} & \\ v_i := u_i & \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\}. \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est libre.

Démonstration. Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda \neq 0$ et $i_0 \in I$ un élément de I. Soit $(v_i)_{i\in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} := \lambda \bullet u_{i_0} \\ v_i := u_i & \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\}. \end{cases}$$

— ($\Rightarrow$) On suppose que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est libre.
  Montrons que la famille $(v_i)_{i\in I}$ est libre.
  Soit J un sous-ensemble fini de I et $(\lambda_j)_{j\in J} \in \mathbb{K}^J$ une famille de scalaires indexée par J tel que : $\sum_{j\in J} \lambda_j \bullet v_j = 0_E$. Il faut montrer que pour tout $j \in J$, $\lambda_j = 0$.
  On pose, pour $j \in J$, $\lambda'_j := \lambda_j$ si $j \neq i_0$, et $\lambda'_j := \lambda \cdot \lambda_j$ si $j = i_0$.
  On a donc : $\sum_{j\in J} \lambda'_j \bullet u_j = 0$.
  Or la famille $(u_i)_{i\in I}$ est libre, donc par la définition 1, on sait que, pour tout $j \in J$, $\lambda'_j = 0$.
  Puis pour $j \in J$,
  — si $j \neq i_0$,
    $\lambda'_j = \lambda_j$, puis $\lambda_j = 0$;
  — si $j = i_0$,
    $\lambda'_j = \lambda \cdot \lambda_j$ et $\lambda \neq 0$, donc $\lambda_j = 0$;
  donc dans les deux cas, $\lambda_j = 0$.
  Puis par la définition 1, la famille $(v_i)_{i\in I}$ est libre.
— ($\Leftarrow$) On suppose que la famille $(v_i)_{i\in I}$ est libre. On montre que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est libre en appliquant le point précédent en remplaçant la famille $(u_i)_{i\in I}$ par la famille $(v_i)_{i\in I}$ et réciproquement, et en remplaçant λ par son inverse (puisque $\lambda \neq 0$).

□

Proposition 5

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soient $i_0 \in I$ et $j_0 \in I$ deux éléments de I. Soit $(v_i)_{i\in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} := u_{i_0} + u_{j_0} \\ v_i := u_i & \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est libre.

Démonstration. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soient $i_0 \in I$ et $j_0 \in I$ deux éléments de I. Soit $(v_i)_{i\in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$v_i := u_i + \delta_{i_0}^i \cdot u_{j_0} \quad \text{pour } i \in I.$$

1. si $i_0 = j_0$, $(u_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si $(v_i)_{i\in I}$ est libre d'après la propriété 4 (avec $\lambda = 2$).
2. on suppose que $i_0 \neq j_0$:
   (a) ($\Rightarrow$) On suppose que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est une famille libre.
   Soit $J \subseteq I$ un sous-ensemble fini de I.
   Soit $(\lambda_i)_{i\in J} \in \mathbb{K}^J$ une famille de scalaires indexée par J, telle que $\sum_{i\in J} \lambda_i \bullet v_i = 0_E$.
   On a donc $\sum_{i\in J} \lambda_i \bullet (u_i + \delta_{i_0}^i \cdot u_{j_0}) = 0_E$.
   Puis, $\lambda_{i_0} \cdot u_{j_0} + \sum_{i\in J} \lambda_i \bullet u_i = 0_E$.
   Puis, $\sum_{i\in J}(\lambda_i + \delta_{j_0}^i \cdot \lambda_{i_0}) \cdot u_i = 0_E$.
   Comme $(u_i)_{i\in I}$ est libre dans $(E, +, \bullet)$, pour tout $i \in J$, $\lambda_i + \delta_{j_0}^i \cdot \lambda_{i_0} = 0$.
   Donc pour $i \in J \setminus \{j_0\}$, $\lambda_i = 0$.
   De plus, on a : $\lambda_{j_0} + \lambda_{i_0} = 0$.
   Comme $j_0 \neq i_0$, on a $\lambda_{i_0} = 0$, donc $\lambda_{j_0} = 0$. Puis, $(v_i)_{i\in I}$ est une famille libre de $(E, +, \bullet)$.

   (b) ($\Leftarrow$) On suppose que la famille $(v_i)_{i\in I}$ est une famille libre.
   Soit $J \subseteq I$ un sous-ensemble fini de I.
   Soit $(\lambda_i)_{i\in J} \in \mathbb{K}^J$ une famille de scalaires indexée par J, telle que $\sum_{i\in J} \lambda_i \bullet u_i = 0_E$.
   On a donc $\sum_{i\in J} \lambda_i \bullet (v_i - \delta_{i_0}^i \cdot u_{j_0}) = 0_E$.
   Or $v_{j_0} = u_{j_0}$ car $i_0 \neq j_0$.
   Donc $\sum_{i\in J} \lambda_i \bullet (v_i - \delta_{i_0}^i \cdot v_{j_0}) = 0_E$. Puis, $\sum_{i\in J}(\lambda_i - \delta_{j_0}^i \cdot \lambda_{i_0}) \cdot v_i = 0_E$.
   Comme $(v_i)_{i\in I}$ est libre dans $(E, +, \bullet)$, pour tout $i \in J$, $\lambda_i - \delta_{j_0}^i \cdot \lambda_{i_0} = 0$.
   Donc pour $i \in J \setminus \{j_0\}$, $\lambda_i = 0$.
   De plus, On a : $\lambda_{j_0} - \lambda_{i_0} = 0$, donc $\lambda_{j_0} = 0$. Puis $(u_i)_{i\in I}$ est une famille libre de $(E, +, \bullet)$.

□

Proposition 6

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient $i_0 \in I$ et $j_0 \in I$ deux éléments de I tels que $i_0 \neq j_0$. Soit $(v_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} := u_{i_0} + \lambda \bullet u_{j_0} & \\ v_i := u_i & \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre si et seulement si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est libre.

Démonstration. On définit la famille $(w_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} w_{j_0} := \lambda \bullet u_{j_0} & \\ w_i := u_i & \text{pour } i \in I \setminus \{j_0\} \end{cases}$$

Puis, la famille $(w'_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} w'_{i_0} := w_{i_0} + w_{j_0} & \\ w'_i := w_i & \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\} \end{cases}$$

Et, la famille $(w'_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} w''_{j_0} := \frac{1}{\lambda} \bullet w'_{j_0} & \\ w''_i := w'_i & \text{pour } i \in I \setminus \{j_0\} \end{cases}$$

puis la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre dans $(E, +, \bullet)$,
si et seulement si, par la propriété 4, la famille $(w_i)_{i \in I}$ est libre dans $(E, +, \bullet)$,
si et seulement si, par la propriété 5, la famille $(w'_i)_{i \in I}$ est libre dans $(E, +, \bullet)$,
si et seulement si, par la propriété 4, la famille $(w''{}_i)_{i \in I}$ est libre dans $(E, +, \bullet)$.

Or, pour $i \in I$ on a :

1.
$$\begin{aligned} w''_{i_0} &= w'_{i_0} && (\text{car } i_0 \neq j_0) \\ w''_{i_0} &= w_{i_0} + w_{j_0} && \\ w''_{i_0} &= u_{i_0} + \lambda \bullet u_{j_0} && (\text{car } i_0 \neq j_0) \\ w''_{i_0} &= v_{i_0} && \end{aligned}$$

2.
$$
\begin{aligned}
w''_{j_0} &= \tfrac{1}{\lambda} \cdot w'_{j_0} \\
w''_{j_0} &= \tfrac{1}{\lambda} \cdot w'_{j_0} && (\text{car } j_0 \neq i_0) \\
w''_{j_0} &= \tfrac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \bullet u_{j_0}) \\
w''_{j_0} &= u_{j_0} \\
w''_{j_0} &= v_{j_0} && (\text{car } j_0 \neq i_0)
\end{aligned}
$$

3. et pour $i \in I \setminus \{i_0, j_0\}$:

$$
\begin{aligned}
w''_i &= w'_i && (\text{car } i \neq j_0) \\
w''_i &= w_i && (\text{car } i \neq i_0) \\
w''_i &= u_i && (\text{car } i \neq j_0) \\
w''_i &= v_i && (\text{car } i \neq i_0)
\end{aligned}
$$

Ainsi $(u_i)_{i \in I}$ est libre dans $(E, +, \bullet)$ si et seulement si $(v_i)_{i \in I}$ est libre dans $(E, +, \bullet)$.

□

Proposition 7

Soient m et n deux entiers positifs dans $\mathbb{N}$. Soit $(u_i)_{1 \leq i \leq m} \in (\mathbb{K}^n)^m$ une famille de m vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathbb{K}^n, \dot{+}, \dot{\cdot})$. Si pour tout i entre 1 et m, il existe une coordonnée j_i telle que pour tout indice i' entre 1 et m, la j_i-ième coordonnée de $u_{i'}$ soit égale à 0 si et seulement si $i' \neq i$, alors la famille $(u_i)_{1 \leq i \leq m}$ est libre.

Démonstration. Soient $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq m} \in \mathbb{K}^m$ une famille de m scalaires tels que $\sum_{i=1}^m \lambda_i \dot{\bullet} u_i = (0)_{1 \leq j \leq n}$.
Soit i entre 1 et m.
Soit j_i entre 1 et n tel que pour tout i' entre 1 et m on ait : la j_i-ième cordonnée de $u_{i'}$ soit égale à zéro si et seulement si $i \neq i'$.
On a : $\sum_{i=1}^m \lambda_i \dot{\bullet} u_i = (0)_{1 \leq j \leq n}$.
Donc, selon la j_i-ième coordonnée, on obtient : $\lambda_i \bullet u_i = 0$.
Puis, comme $u_i \neq 0$, $\lambda_i = 0$.
Donc la famille $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre. □

Démonstration. À l'étape 1, on peut montrer par récurrence que pour tout les vecteurs u_k pour $1 \leq k \leq p$, il existe une coordonnée j_k tel que $u_{k', j_k} = 0$ pour k' entre 1 et m et $k' \neq k$. De plus, les transformations effectuées sur la famille de vecteur ne modifient pas le fait d'être lié ou libre (d'après la propriété 4

Algorithme 1 : Élimination de GAUSS-JORDAN

Data : Soient m et n deux entiers positifs dans $\mathbb{N}$. Soit $(u_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{K}^n)^m$ une famille de m vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

Result : L'algorithme suivant permet de décider si $(u_i)_{1\leq i\leq m}$ est libre, ou liée.

On note $u_{i,j}$ la j-ième coordonnée du i-ième vecteur de la famille $(u_i)_{1\leq i\leq m}$.

Prendre $p \leftarrow 0$.

1. si $p = m$ alors la famille est libre.
2. si $p < m$ et s'il pour tout q entre 1 et n, $u_{p+1,q} = 0$, alors la famille est liée.
3. sinon, prendre q le plus petit entier tel que $u_{p+1,q} \neq 0$.
4. Multiplier le vecteur u_{p+1} par l'inverse de $u_{p+1,q}$.
5. Soustraire à chaque vecteur $u_{p'}$ pour $p' \neq p$ le vecteur u_{p+1} multiplié par $u_{p',q}$.
6. Prendre $p \leftarrow p+1$.
7. Retourner à l'étape 1.

pour l'étape 4, la propriété 6 pour l'étape 5). Ainsi, si à l'étape 1, $p = m$, alors la famille satisfait la propriété 7, elle est donc libre. Par contre, si un vecteur est nul, d'après la propriété 1 la famille est liée. Dans les autres cas, on peut continuer à itérer l'algorithme. □

Exemple 5

On peut utiliser l'algorithme 1 pour montrer que la famille $((1,1,0),(-1,1,0))$ est libre.

Démonstration. La famille $\begin{pmatrix} (1,1,0) \\ (-1,1,0) \end{pmatrix}$ est libre,

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,1,0) \\ (0,2,0) \end{pmatrix}$ est libre (en utilisant la transformation $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$),

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,1,0) \\ (0,1,0) \end{pmatrix}$ est libre (en utilisant la transformation $L_2 \leftarrow L_2/2$),

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,0,0) \\ (0,1,0) \end{pmatrix}$ est libre (en utilisant la transformation

$L_1 \leftarrow L1 - L2$).
Or cette dernière famille est libre, par la propriété 7, donc la famille $((1,1,0),(-1,1,0))$ est libre. $\square$

Exemple 6

On peut utiliser l'algorithme 1 pour montrer que la famille $((1,0,1),(-1,0,1))$ est libre.

Démonstration. La famille $\begin{pmatrix} (1,0,1) \\ (-1,0,1) \end{pmatrix}$ est libre,
si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,0,1) \\ (0,0,2) \end{pmatrix}$ est libre (en utilisant la transformation $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$),
si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,0,1) \\ (0,0,1) \end{pmatrix}$ est libre (en utilisant la transformation $L_2 \leftarrow L_2/2$),
si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,0,0) \\ (0,0,1) \end{pmatrix}$ est libre (en utilisant la transformation $L_1 \leftarrow L1 - L2$).
Or cette dernière famille est libre, par la propriété 7, donc la famille $((1,0,1),(-1,0,1))$ est libre. $\square$

Exemple 7

On peut utiliser l'algorithme 1 pour montrer que la famille $((1,1,0),(-1,-1,0))$ est liée.

Démonstration. La famille $\begin{pmatrix} (1,1,0) \\ (-1,-1,0) \end{pmatrix}$ est libre,
si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,1,0) \\ (0,0,0) \end{pmatrix}$ est libre (en utilisant la transformation $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$).
Or cette dernière famille est liée, par la propriété 1, donc la famille $((1,1,0),(-1,-1,0))$ est liée. $\square$

2 Familles génératrices

Définition 3

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est dite génératrice de $(E, +, \bullet)$ si et seulement si pour tout élément $u \in E$, il existe un sous-ensemble fini $J \subseteq I$ et une famille de scalaire $(\lambda_j)_{j\in J}$, tels que :

$$\sum_{j\in J} \lambda_j \bullet u_j = u.$$

Proposition 8

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit I un ensemble, et soit $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. La famille $(u_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de $(E, +, \bullet)$ si et seulement si $\mathrm{Vect}(\{u_i \mid i \in I\}) = E$.

Démonstration. Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble et soit $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I.

1. ($\Rightarrow$) On suppose que $(u_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de $(E, +, \bullet)$.
   On sait que : $\mathrm{Vect}(\{u_i \mid i \in I\}) \subseteq E$.
   Montrons que : $E \subseteq \mathrm{Vect}(\{u_i \mid i \in I\})$.
   Soit $u \in E$.
   $(u_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E.
   Donc, il existe $J \subseteq I$ un sous ensemble fini de I et une famille $(\lambda_j)_{j\in J}$ de scalaires indexée par J, tel que : $u = \sum_{j\in J} \lambda_j \bullet u_j$.
   Puis, $u \in \mathrm{Vect}(\{u_i \mid i \in I\})$.
   D'où $E \subseteq \mathrm{Vect}(\{u_i \mid i \in I\})$.
   Puis $E = \mathrm{Vect}(\{u_i \mid i \in I\})$.

2. ($\Leftarrow$) On suppose que $\mathrm{Vect}(\{u_i \mid i \in I\}) = E$.
   Montrons que : $(u_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E.
   Soit $u \in E$.
   On a : $u \in \mathrm{Vect}(\{u_i \mid i \in I\})$.
   Puis, il existe $J \subseteq I$ un sous ensemble fini de I et une famille $(\lambda_j)_{j\in J}$ de scalaires indexée par J, tel que : $u = \sum_{j\in J} \lambda_j \bullet u_j$.
   Donc $(u_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E.

$\square$

Exemple 8

Pour tout élément non nul, $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, la famille (λ) est une famille génératrice de $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathbb{K}, +, \cdot)$.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda \neq 0$.
Soit $\mu \in \mathbb{K}$. On a, comme $\lambda \neq 0$, $\mu = \frac{\mu}{\lambda} \cdot \lambda$.
Donc (λ) est une famille génératrice de $(\mathbb{K}, +, \cdot)$. □

Exemple 9

Si $(E, +, \bullet)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors la famille $(u)_{u \in E}$ de tous les vecteurs de E est une famille génératrice.

Démonstration. Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Pour $u \in E$, $u = 1 \bullet u$.
Donc $(u)_{u \in E}$ est une famille génératrice de E. □

Exemple 10

La famille $((1,1,0), (-1,1,0), (1,1,1))$ est une famille génératrice de $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\cdot})$.

Démonstration. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
On a : $\frac{x+y-2\cdot z}{2} \dot{\cdot} (1,1,0) \dot{+} \frac{y-x}{2} \dot{\cdot} (-1,1,0) \dot{+} z \dot{\cdot} (1,1,1) = \left(\frac{x+y-2\cdot z}{2} - \frac{y-x}{2} + z, \frac{x+y-2\cdot z}{2} + \frac{y-x}{2} + z,\right.$
Puis, $\frac{x+y-2\cdot z}{2} \dot{\cdot} (1,1,0) \dot{+} \frac{y-x}{2} \dot{\cdot} (-1,1,0) \dot{+} z \dot{\cdot} (1,1,1) = (x, y, z)$.
Donc, la famille $((1,1,0), (-1,1,0), (1,1,1))$ est une famille génératrice de $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\cdot})$. □

Exemple 11

La famille $((1,1,0), (-1,1,0), (2,3,0))$ n'est pas une famille génératrice de $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\bullet})$.

Démonstration. Montrons que $(0,0,1) \notin \mathrm{Vect}(\{(1,1,0), (-1,1,0), (2,3,0)\})$.
Par l'absurde, soit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda \dot{\cdot} (1,1,0) \dot{+} \mu \dot{\cdot} (-1,1,0) \dot{+} \nu \dot{\cdot} (2,3,0) = (0,0,1)$.
Pour la troisième coordonnée, on aurait :$\lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 + \nu \cdot 0 = 1$.
Puis $1 = 0$, ce qui est absurde.

Donc la famille $((1,1,0),(-1,1,0),(2,3,0))$ n'est pas une famille génératrice de $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\cdot})$. $\square$

Exemple 12

La famille des suites $(\delta^k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas une famille génératrice de l'espace des suites à valeur dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Montrons que la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}} \notin \text{Vect}\left((\delta^k)_{k\in\mathbb{N}}\right)$. Par l'absurde, soit I un sous ensemble fini de $\mathbb{N}$ et $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ une famille finie de scalaire indexée par I, tel que : $(n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{i\in I} \lambda_i \dot{\cdot} \delta^i$.
I serait une partie finie de $\mathbb{N}$.
Donc il existerait un entier $n_0 > 0$ tel que pour tout $i \in I$, $i < n_0$.
Au rang n_0, on aurait $n_0 = \sum_{i\in I} \lambda_i \dot{\cdot} \delta^i_{n_0}$.
Or pour $i \in I$, $i < n_0$ donc $i \neq n_0$, puis $\delta^i_{n_0} = 0$.
D'où, $n_0 = 0$ (ce qui est absurde).
Donc la famille $(\delta^k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas une famille génératrice des suites à valeur dans $\mathbb{R}$. $\square$

Proposition 9

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit I un ensemble et $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}^n$ telle qu'il existe un indice $i_0 \in I$ tel que pour tout indice $i \in I$, la coordonnée i_0 de u_i soit égale à 0. Alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas génératrice.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit I un ensemble et $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}^n$ telle qu'il existe un indice $i_0 \in I$ tel que pour tout indice $i \in I$, la coordonnée i_0 de u_i soit égale à 0.
Soit $\delta^{i_0} \in \mathbb{K}^n$, le vecteur dont toutes les coordonnées sont égales à 0, sauf la i-ième coordonnée qui vaut 1. Soit $J \subseteq I$ un sous-ensemble fini de I et $(\lambda_j)_{j\in J} \in \mathbb{K}^J$ une famille de scalaires indexée par J. On suppose par l'absurde que $\delta^{i_0} = \sum_{j\in J} \lambda_j \dot{\bullet}\, u_j$. Sur la i-ième coordonnée, on aurait : $1 = 0$, ce qui est absurde.
Donc la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas une famille génératrice. $\square$

Proposition 10

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers naturels. Soit $(u_i)_{1\leq i\leq m}$ une famille de m éléments de $\mathbb{K}^n$. On suppose qu'il existe un indice i_0 tel que $1 \leq i_0 \leq \min(m-1, n)$, et tel que pour tout i entre 1 et i_0, la j-ième coordonnée du vecteur u_i vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon, et tel que pour tout $i > i_0$ la $i_0 + 1$-

ième coordonnée du vecteur u_i vaut 0. Alors la famille $(u_i)_{1\leq i\leq m}$ n'est pas génératrice.

Démonstration. Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers naturels. Soit $(u_i)_{1\leq i\leq m}$ une famille de m éléments de $\mathbb{K}^n$. Soit i_0 un indice tel que $1 \leq i_0 \leq \min(m-1, n)$, et tel que pour tout i entre 1 et i_0, la j-ième coordonnée du vecteur u_i vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon, et tel que pour tout $i > i_0$ la $i_0 + 1$-ième coordonnée du vecteur u_i vaut 0. On note $u_{i,j}$ la valeur de la j-ième coordonnée du vecteur u_i Posons $(v_j)_{1\leq j\leq n} \in \mathbb{K}^n$ le vecteur défini par :

$$\begin{cases} v_j = 1 & \text{si } j \neq i_0 \\ v_j = 1 + \sum_{k=1}^{i_0} u_{k,i_0} & \text{si } j = i_0 \end{cases}$$

On suppose par l'absurde qu'il existe $(\lambda_i)_{1\leq i\leq m} \in \mathbb{K}^m$ une famille de m scalaires tels que $\sum_{1\leq i\leq m} \lambda_i \dot{\cdot} u_i = (v_j)_{1\leq j\leq n}$. Pour $j < i_0$, on aurait, sur la j-ième coordonnée, $v_j = \lambda_j$, puis $\lambda_j = 1$. Mais, sur la i_0-ième coordonnée, on aurait $v_{i_0} = \sum_{k=1}^{i_0} \lambda_k \cdot u_{k,i_0}$, puis $1 + \sum_{k=1}^{i_0} u_{k,i_0} = \sum_{k=1}^{i_0} \lambda_k \cdot u_{k,i_0}$, et $1 = 0$ (ce qui est absurde).
Donc la famille $(u_i)_{1\leq i\leq m}$ n'est pas génératrice. □

Exemple 13

D'après la propriété 10, la famille :

$$\begin{pmatrix} (1,0,0,3) \\ (0,1,0,2) \\ (0,0,1,2) \\ (0,0,0,0) \end{pmatrix}$$

n'est pas une famille génératrice de $(\mathbb{R}^4, \dot{+}, \dot{\cdot})$.

Exemple 14

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $(\mathbb{K}^n, \dot{+}, \dot{\cdot})$. l'espace vectoriel des n-uplets de scalaires, muni de l'addition et la multiplication coordonnée par coordonnée. La famille $(\delta^k)_{1\leq k\leq n}$ de vecteurs telle que δ_k a toutes ses coordonnées égales à 0, sauf la k-ième coordonnée qui vaut 1 est génératrice.

Démonstration. Soit $(x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{K}^n$.
Posons $y = \sum_{1\leq k\leq n} x_k \dot{\cdot} \delta^k$.

Soit j un entier tel que $1 \leq j \leq n$,

la j-ième coordonnée de $(x_i)_{1\leq i \leq n}$ vaut x_j.

la j-ième coordonnée de y vaut $\sum_{1\leq k\leq n} x_k \cdot \delta^k_j$, puis la j-ième coordonnée de y vaut x_j.

Ainsi $(x_i)_{i\in I} = \sum_{1\leq k\leq n} x_k \cdot \delta^k$. Donc $(\delta^k)_{1\leq k\leq n}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$. □

Proposition 11

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit J un sous ensemble de I. Alors, si la famille $(u_j)_{j\in J}$ est génératrice de E, alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est génératrice de E.

Démonstration. Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit J un sous ensemble de I. Alors, si la famille $(u_j)_{j\in J}$ est génératrice de E.

Soit $x \in E$, Soit $K \subseteq J$ un ensemble fini d'indices, et $(\lambda_k)_{k\in K} \in E^K$, une famille de scalaires indexée par K telle que : $x = \sum_{k\in K} \lambda_k \bullet u_k$. On a : $J \subseteq I$, donc K est un sous ensemble fini de I et $x = \sum_{k\in K} \lambda_k \bullet u_k$. Ainsi $(u_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de $(E, +, \bullet)$. □

Proposition 12

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit σ une bijection de I dans I. Soit $(v_i)_{i\in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_i := u_{\sigma(i)} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est génératrice si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est génératrice.

Démonstration. Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit σ une bijection de I dans I. Soit $(v_i)_{i\in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_i := u_{\sigma(i)}. \end{cases}$$

1. ($\Rightarrow$) On suppose que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice.
   Soit $x \in E$.
   Soit $J \subseteq I$ et $(\lambda_j)_{j\in J} \in \mathbb{K}^J$ une famille de scalaires indexée par J telle que $x = \sum_{j\in J} \lambda_j \bullet u_j$.
   On a donc : $x = \sum_{j\in J} \lambda_{\sigma(\sigma^{-1}(j))} \bullet u_{\sigma(\sigma^{-1}(j))}$.
   Puis : $x = \sum_{j\in J} \lambda_{\sigma(\sigma^{-1}(j))} \bullet v_{\sigma^{-1}(j)}$.
   Enfin : $x = \sum_{j'\in\{k\in I \mid \sigma(k)\in J\}} \lambda_{\sigma(k)} \bullet v_k$.
   Or $\{k \in I \mid \sigma(k) \in J\}$ est un sous-ensemble fini de I, puis $(v_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de $(E, +, \bullet)$.
2. ($\Leftarrow$) On suppose que la famille $(v_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice. Alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ l'est également, en appliquant le point précédent en remplaçant $(u_i)_{i\in I}$ par $(v_i)_{i\in I}$, et réciproquement et σ par σ^{-1}.

□

Proposition 13

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda \neq 0$ et $i_0 \in I$ un élément de I. Soit $(v_i)_{i\in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} := \lambda \bullet u_{i_0} & \\ v_i := u_i & \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est génératrice si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est génératrice.

Démonstration. Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda \neq 0$ et $i_0 \in I$ un élément de I. Soit $(v_i)_{i\in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} := \lambda \bullet u_{i_0} & \\ v_i := u_i & \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\} \end{cases}$$

1. ($\Rightarrow$) On suppose que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de $(E, +, \bullet)$.
   Soit $x \in E$,
   Comme $(u_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice, il existe un sous-ensemble $J \subseteq I$ fini de I et une famille de scalaires $(\mu_j)_{j\in J} \in \mathbb{K}^J$ indexée par J de sorte que : $x = \sum_{j\in J} \mu_j \bullet u_j$.

Or, pour $i \in I$, on a : $u_i = \frac{1}{1+(\lambda-1)\times\delta_i^{i_0}} \bullet v_i$.
D'où $x = \sum_{j\in J} \frac{\mu_j}{1+(\lambda-1)\times\delta_i^{i_0}} \bullet v_i$.
Puis (v_i) est une famille génératrice.

2. $(\Leftarrow)$ On suppose que la famille $(v_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de $(E, +, \bullet)$.
On a pour $i \in I$, comme $\lambda \neq 0$:

$$\begin{cases} u_i = \frac{1}{\lambda} \bullet v_i & \text{si } i = i_0 \\ u_i = v_i & \text{sinon ;} \end{cases}$$

Or $\frac{1}{\lambda} \neq 0$, par le point précédent, la famille (u_i) est une famille génératrice de $(E, +, \bullet)$.

□

Proposition 14

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soient $i_0 \in I$ et $j_0 \in I$ deux éléments de I. Soit $(v_i)_{i\in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} := u_{i_0} + u_{j_0} & \\ v_i := u_i & \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est génératrice si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est génératrice.

Démonstration. Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soient $i_0 \in I$ et $j_0 \in I$ deux éléments de I. Soit $(v_i)_{i\in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} := u_{i_0} + u_{j_0} & \\ v_i := u_i & \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\}. \end{cases}$$

1. si $i_0 = j_0$, alors $v_{i_0} = 2 \bullet u_{i_0}$, puis d'après la propriété 13, $(u_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice si et seuelement si $(v_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice.
2. si $i_0 \neq j_0$:
   (a) $(\Rightarrow)$ On suppose que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de $(E, +, \bullet)$.
   Soit $x \in E$ un vecteur de E.

Soit $J \subseteq I$ un sous ensemble fini de I et $(\mu_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J$ une famille de scalaires indexée par J et telle que $x = \sum_{j \in J} \mu_j \bullet u_j$.

On a, pour $i \in I$, $v_i = u_i + \delta_i^{i_0} \bullet u_{j_0}$.

Puis comme $i_0 \neq j_0$, $v_{j_0} = u_{i_0}$ et, pour $i \in I$, $v_i = u_i + \delta_i^{i_0} \bullet v_{j_0}$.

Ainsi, pour $i \in I$, $u_i = v_i - \delta_i^{i_0} \bullet u_{j_0}$.

D'où, $x = \sum_{j \in J} \mu_j \bullet (v_i - \delta_i^{i_0} \bullet u_{j_0})$. Et, $x = \sum_{j \in J} (\mu_j - \delta_i^{j_0} \times \mu_{i_0}) \bullet v_i$.
Donc la famille $(v_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de $(E, +, \bullet)$.

(b) $(\Leftarrow)$ On suppose que la famille $(v_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de $(E, +, \bullet)$.
Soit $x \in E$ un vecteur de E.
Soit $J \subseteq I$ un sous ensemble fini de I et $(\mu_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J$ une famille de scalaires indexée par J et telle que $x = \sum_{j \in J} \mu_j \bullet v_j$.

On a donc, $x = \sum_{j \in J} \mu_j \bullet (u_j + \delta_i^{i_0} \bullet u_{j_0})$. Puis, $x = \sum_{j \in J} (\mu_j + \delta_i^{j_0} \mu_{i_0}) \bullet u_i$. Puis $(u_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de $(E, +, \bullet)$.

□

Proposition 15

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient $i_0 \in I$ et $j_0 \in I$ deux éléments de I tels que $i_0 \neq j_0$. Soit $(v_i)_{i \in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} = u_{i_0} + \lambda \bullet u_{j_0} & \\ v_i = u_i & \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est génératrice si et seulement si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est génératrice.

Démonstration. On définit la famille $(w_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E défine par :

$$\begin{cases} w_{j_0} := \lambda \bullet u_{j_0} & \\ w_i := u_i & \text{pour } i \in I \setminus \{j_0\} \end{cases}$$

Puis, la famille $(w'_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} w'_{i_0} := w_{i_0} + w_{j_0} & \\ w'_i := w_i & \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\} \end{cases}$$

Et, la famille $(w'_i)_{i\in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} w''_{j_0} := \frac{1}{\lambda} \bullet w'_{j_0} \\ w''_i := w'_i & \text{pour } i \in I \setminus \{j_0\} \end{cases}$$

puis la famille $(u_i)_{i\in I}$ est génératrice de $(E, +, \bullet)$,
si et seulement si, par la propriété 13, la famille $(w_i)_{i\in I}$ est génératrice de $(E, +, \bullet)$,
si et seulement si, par la propriété 14, la famille $(w'_i)_{i\in I}$ est génératrice de $(E, +, \bullet)$,
si et seulement si, par la propriété 13, la famille $(w''{}_i)_{i\in I}$ est génératrice de $(E, +, \bullet)$.

Or, pour $i \in I$ on a :

1.
$$\begin{aligned} w''_{i_0} &= w'_{i_0} && (\text{car } i_0 \neq j_0) \\ w''_{i_0} &= w_{i_0} + w_{j_0} \\ w''_{i_0} &= u_{i_0} + \lambda \bullet u_{j_0} && (\text{car } i_0 \neq j_0) \\ w''_{i_0} &= v_{i_0} \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} w''_{j_0} &= \frac{1}{\lambda} \cdot w'_{j_0} \\ w''_{j_0} &= \frac{1}{\lambda} \cdot w'_{j_0} && (\text{car } j_0 \neq i_0) \\ w''_{j_0} &= \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \bullet u_{j_0}) \\ w''_{j_0} &= u_{j_0} \\ w''_{j_0} &= v_{j_0} && (\text{car } j_0 \neq i_0) \end{aligned}$$

3. et pour $i \in I \setminus \{i_0, j_0\}$:
$$\begin{aligned} w''_i &= w'_i && (\text{car } i \neq j_0) \\ w''_i &= w_i && (\text{car } i \neq i_0) \\ w''_i &= u_i && (\text{car } i \neq j_0) \\ w''_i &= v_i && (\text{car } i \neq i_0) \end{aligned}$$

Ainsi $(u_i)_{i\in I}$ est génératrice de$(E, +, \bullet)$ si et seulement si $(v_i)_{i\in I}$ est génératrice de $(E, +, \bullet)$.

□

Démonstration. À l'étape 1, on peut montrer par récurrence que pour tout$k$ et tout l tels que $1 \leq k \leq p$, $1 \leq l \leq p$, $u_{k,l} = 0$ si $k \neq l$, et $u_{k,l} = 1$ si $k = l$. De plus, les transformations effectuées sur la famille de vecteur ne modifient pas le

Algorithme 2 : Comment trouver si une famille est génératrice ?

Soient m et n deux entiers positifs dans $\mathbb{N}$. Soit $(u_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{K}^n)^m$ une famille de m vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On note $u_{i,j}$ la j-ième coordonnée du i-ième vecteur de la famille $(u_i)_{1\leq i\leq m}$. L'algorithme suivant permet de décider si $(u_i)_{1\leq i\leq m}$ est génératrice, ou non.

Prendre $p \leftarrow 0$.

1. si $p = n$ alors la famille est génératrice.
2. si $p < n$ et si pour tout k tel que $p < k \leq m$, on a : $u_{k,p+1} = 0$ alors la famille n'est pas génératrice.
3. sinon, prendre k le plus petit entier strictement supérieur à p tel que $u_{k,p+1} \neq 0$.
4. Multiplier le vecteur u_k par l'inverse de $u_{k,p+1}$.
5. Soustraire à chaque vecteur $u_{k'}$ pour $k' \neq k$ le vecteur u_k multiplié par $u_{k,p+1}$.
6. Permuter le vecteur u_{p+1} et u_k.
7. Prendre $p \leftarrow p + 1$.
8. Retourner à l'étape 1.

fait d'être une famille génératrice, ou non (d'après la propriété 13 pour l'étape 4, d'après la propriété 14 pour l'étape 5, d'après la propriété 12 pour l'étape 6). Ainsi, si à l'étape 1, $p = n$, la famille est celle de l'exemple 14, elle est donc génératrice. Par contre, si le test de l'étape (2) échoue, la famille ne peut pas être génératrice soit par la propriété 9, soit par la propriété 10. $\square$

Exemple 15

On peut utiliser l'algorithme 2 pour montrer que la famille $((1,1,0),(-1,1,0),(1,1,1))$ est une famille génératrice.

Démonstration. La famille $\begin{pmatrix} (1,1,0) \\ (-1,1,0) \\ (1,1,1) \end{pmatrix}$ est une famille génératrice

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,1,0) \\ (0,2,0) \\ (0,0,1) \end{pmatrix}$ est une famille génératrice (en utilisant les transformations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$)

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,1,0) \\ (0,1,0) \\ (0,0,1) \end{pmatrix}$ est une famille génératrice (en utilisant la transformation $L_2 \leftarrow L_2/2$)

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,0,0) \\ (0,1,0) \\ (0,0,1) \end{pmatrix}$ est une famille génératrice (en utilisant la transformation $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$)

Or cette dernière famille est génératrice car elle satisfait la propriété 9.
Donc la famille $((1,1,0),(-1,1,0),(1,1,1))$ est une famille génératrice. $\square$

Exemple 16

On peut utiliser l'algorithme 2 pour montrer que la famille $((1,1,1),(-1,1,-1),(2,0,2))$ n'est pas génératrice.

Démonstration. La famille $\begin{pmatrix} (1,1,1) \\ (-1,1,-1) \\ (2,0,2) \end{pmatrix}$ est une famille génératrice

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,1,1) \\ (0,2,0) \\ (0,-2,0) \end{pmatrix}$ est une famille génératrice (en utilisant les transformations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2 \cdot L_1$)

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,1,1) \\ (0,1,0) \\ (0,-2,0) \end{pmatrix}$ est une famille génératrice (en utilisant la transformation $L_2 \leftarrow L_2/2$)
si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,0,1) \\ (0,1,0) \\ (0,0,0) \end{pmatrix}$ est une famille génératrice (en utilisant la transformation $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$)
Or cette dernière famille n'est pas génératrice car pour tout $(x,y,z) \in \mathrm{Vect}\,((1,0,1),(0,1,0),(0,0,0$
on a $x = z$. Puis $(0,0,1) \notin \mathrm{Vect}\,((1,0,1),(0,1,0),(0,0,0))$.
Donc la famille $((1,1,1),(-1,1,-1),(2,0,2))$ n'est pas une famille génératrice.

□

3 Bases et dimensions

Définition 4

Soit $(E,+,\bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle base de E toute famille d'éléments de E qui est à la fois libre et génératrice de E.

Théorème 1

Soit $(E,+,\bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble et $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I, tel que $(u_i)_{i\in I}$ soit une base de E.
Alors pour tout vecteur $u \in E$, il existe un unique sous-ensemble $J \subseteq I$ et une unique famille $(\lambda_j)_{j\in J}$ de scalaires non nuls tel que :

$$u = \sum_{j\in J} \lambda_j \bullet u_j.$$

Ainsi tout vecteur admet une décomposition unique dans une base.

Démonstration. Soit $(E,+,\bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble et $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I, tel que $(u_i)_{i\in I}$ soit une base de E.
Soit $u \in E$.

— La famille $(u_i)_{i\in I}$ est génératrice. Il existe donc un sous-ensemble fini $J \subseteq I$ et une famille $(\lambda_j)_{j\in J} \in \mathbb{K}^J$ de scalaires dans $\mathbb{K}$ tel que $u = \sum_{j\in J} \lambda_j \bullet u_j$.
— Soient J' un sous-ensemble de I, et $(\lambda'_{j'})_{j'\in J'} \in \mathbb{K}^{J'}$ une famille de scalaires non nuls telle que : $u = \sum_{j'\in J'} \lambda_{j'} \bullet u_{j'}$. On définit, pour $j' \in J \setminus J'$, $\lambda'_{j'} = 0$

et pour $j \in J' \setminus J$, $\lambda_j = 0$. On a donc : $u = \sum_{j \in J \cup J'} \lambda_j \bullet u_j$ et $u = \sum_{j \in J \cup J'} \lambda'_j \bullet u_j$. Puis $\sum_{j \in J \cup J'} \lambda_j \bullet u_j = \sum_{j \in J \cup J'} \lambda'_j \bullet u_j$. D'où : $\sum_{j \in J \cup J'} (\lambda_j - \lambda'_j) \bullet u_j$. Or $J \cup J'$ est un ensemble fini, et la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre. Donc pour tout $j \in J \cup J'$, $\lambda_j - \lambda'_j = 0$. Puis pour tout $j \in J \cup J'$, $\lambda_j = \lambda'_j$. On en déduit que $J = J'$, et pour tout $j \in J$, $\lambda_j = \lambda_{j'}$.

□

Exemple 17

Tout élément non nul de $\mathbb{K}$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathbb{K}, +, \bullet)$.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. D'après l'exemple 1, (λ) est une famille libre du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathbb{K}, +, \bullet)$. D'après l'exemple 8, (λ) est une famille génératrice du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathbb{K}, +, \bullet)$. Ainsi, (λ) est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathbb{K}, +, \bullet)$. □

Exemple 18

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $(\delta_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{K}^n)^n$ la famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$ telle que la j-ième coordonnée du i-ième vecteur soit égale à 0 si $i \neq j$ et à 1 sinon. Alors $(\delta_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{K}^n)^n$ est une base de $(\mathbb{K}^n, \dot{+}, \dot{\cdot})$ (on dit que c'est la base canonique de $\mathbb{K}^n$).

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $(\delta_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{K}^n)^n$ la famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$ telle que la j-ième coordonnée du i-ième vecteur soit égale à 0 si $i \neq j$ et à 1 sinon. D'après l'exemple 4, la famille $(\delta_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre dans $(\mathbb{K}^n, \dot{+}, \dot{\cdot})$. De plus, d'après l'exemple 14, la famille $(\delta_i)_{1 \leq i \leq n}$ est génératrice de $(\mathbb{K}^n, \dot{+}, \dot{\cdot})$. Par la définition 4, c'est donc une base de $(\mathbb{K}^n, \dot{+}, \dot{\cdot})$. □

Exemple 19

Soit n un entier et $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble et $(b_i)_{i \in I}$ une base de E. La famille $(e_{i,j})_{i \in I, 1 \leq j \leq n}$ définie par $e_{i,j}$ est un vecteur de n composantes dont la k-ième composante est égale b_i si $j = k$ ou 0_E sinon, est une base de $(E^n, \dot{+}, \dot{\bullet})$.

Démonstration. Soit n un entier et $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble et $(b_i)_{i \in I}$ une base de E. La famille $(e_{i,j})_{i \in I, 1 \leq j \leq n}$ définie par $e_{i,j}$ est un vecteur de n composantes dont la k-ième composante est égale b_i si $j = k$ ou 0_E sinon.

1. famille libre :
   Soit K un sous-ensemble fini de $I \times \{k \in \mathbb{K} \mid 1 \leq k \leq n\}$ et soit $(\lambda_k)_{k\in K} \in \mathbb{K}^K$ une famille de scalaires indexée par K tel que : $\sum_{(i,j)\in K} \lambda_{i,j} \dot{\cdot} e_{i,j} = 0_{E^n}$.
   Soit k un entier entre 1 et n, on a, sur la k-ième composante, $\sum_{(i,j)\in K} \lambda_{i,j} \cdot \delta_j^k \cdot b_i = 0_E$; puis $\sum_{i\in I,\ (i,k)\in K} \lambda_{i,k} \cdot b_i = 0_E$; or l'ensemble $\{i \in I \mid (i,k) \in K\}$ est un sous-ensemble fini de I et la famille $(b_i)_{i\in I} \in E^I$ est libre (car c'est une base), donc pour $i' \in \{i \in I \mid (i,k) \in K\}$, $\lambda_{i,k} = 0$.
   Ainsi, pour $(i,j) \in K$, on a : $\lambda_{i,j} = 0$.
   Puis la famille $(e_{i,j})_{i\in I, 1\leq j\leq n}$ est une famille libre de $(E^n, \dot{+}, \dot{\bullet})$.
2. famille génératrice :
   Soit $(x_j)_{1\leq j\leq n} \in E^n$.
   Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$.
   On sait que $(b_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice.
   Il existe donc un sous-ensemble fini $K_k \subseteq I$ et une famille de scalaires $(\lambda_{i,k})_{i\in K_k}$ telle que $x_k = \sum_{i\in K_k} \lambda_{i,k} \cdot b_i$.
   On considère le vecteur x' de E^n défini par : $x' := \sum_{1\leq j\leq n, i\in K_j} \lambda_{i,j} \dot{\cdot} e_{i,j}$.
   L'ensemble $\{(i,j) \mid 1 \leq j \leq n, i \in K_j\}$ est un sous-ensemble fini de $I \times J$.
   De plus, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$, la k-ième coordonnée x'_k de x' vaut $\sum_{1\leq j\leq n, i\in K_j} \lambda_{i,j} \dot{\cdot} \delta_k^j \cdot b_i$. On a donc : $x'_k = \sum_{i\in K_k} \lambda_{i,k} \cdot b_i$. Puis $x'_k = x_k$.
   Ainsi $(x'_j)_{1\leq j\leq n} = (x_j)_{1\leq j\leq n}$.
   Donc $(e_{i,j})_{i\in I, 1\leq j\leq n}$ est une famille génératrice.

Puis $(e_{i,j})_{i\in I, 1\leq j\leq n}$ est une base de $(E^n, \dot{+}, \dot{\bullet})$. □

Exemple 20

Soit A un ensemble fini et $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble et $(b_i)_{i\in I}$ une base de E. La famille $(f_{i,j})_{i\in I, j\in A}$ définie par $f_{i,j}(a) = b_i$ si $a = j$, et $f_{i,j}(a) = 0_E$ sinon, est une base de $(\mathcal{F}(A,E), \dot{+}, \dot{\bullet})$.

Démonstration. Soit A un ensemble fini et $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble et $(b_i)_{i\in I}$ une base de E. La famille $(f_{i,j})_{i\in I, j\in A}$ définie par $f_{i,j}(a) = b_i$ si $a = j$, et $f_{i,j}(a) = 0_E$ sinon, est une base de $(\mathcal{F}(A,E), \dot{+}, \dot{\bullet})$.

1. famille libre :
   Soit K un sous-ensemble fini de $I \times A$ et soit $(\lambda_k)_{k\in K} \in \mathbb{K}^K$ une famille de scalaires indexée par K tel que : $\sum_{(i,j)\in K} \lambda_{i,j} \dot{\cdot} f_{i,j} = 0_{\mathcal{F}(A,E)}$.

Soit $a \in A$, on a :

$$0 = (0_{\mathcal{F}}(A,E))(a)$$
$$0 = (\sum_{(i,j)\in K} \lambda_{i,j} \dot{\cdot} f_{i,j})(a)$$
$$0 = \sum_{(i,j)\in K} \lambda_{i,j} \cdot f_{i,j}(a)$$
$$0 = \sum_{(i,j)\in K} \lambda_{i,j} \cdot \delta_a^j \cdot b_i$$
$$0 = \sum_{i\in I,(i,a)\in K} \lambda_{i,a} \cdot b_i.$$

Or la famille $(b_i)_{i\in I}$ est une famille libre (car c'est une base).
Donc pour $i \in I$ tel que $(i,a) \in K$, on a : $\lambda_{i,a} = 0$.
Puis pour tout $(i,j) \in K$, $\lambda_{i,j} = 0$.
Puis la famille $(f_{i,j})_{i\in I, j\in A}$ est une famille libre de $(\mathcal{F}[A,E), \dot{+}, \dot{\bullet})$.

2. famille génératrice :
Soit $g \in \mathcal{F}(A,E)$.
Soit $a \in A$.
On sait que $(b_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de $(E, +, \bullet)$. .
Il existe donc un sous-ensemble fini $K_a \subseteq I$ et une famille de scalaires $(\lambda_{i,a})_{i\in K_a}$ telle que $g(a) = \sum_{i\in K_a} \lambda_{i,a} \cdot b_i$.
On considère la fonction $g' \in \mathcal{F}(A,E)$ définie par : $g' := \sum_{a\in A, i\in K_a} \lambda_{i,a} \dot{\cdot} f_{i,a}$.
L'ensemble $\{(i,a) \mid a \in A, i \in K_a\}$ est un sous-ensemble fini de $I \times J$.
De plus, pour tout élément $a \in A$, $g'(a)$ vaut $\sum_{a'\in A, i\in K_a} \lambda_{i,a'} \dot{\cdot} \delta_{a'}^{a} \cdot b_{a'}$. On a donc : $g'(a) = \sum_{i\in K_a} \lambda_{i,a} \cdot b_i$. Puis $g'(a) = g(a)$.
Ainsi $g' = g$.
Donc $(f_{i,j})_{i\in I, j\in A}$ est une famille génératrice.

Puis $(f_{i,j})_{i\in I, j\in A}$ est une base de $(\mathcal{F}(A,E), \dot{+}, \dot{\bullet})$ □

Exemple 21

La famille des suites $(\delta^k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel des suites qui stationnent en 0.

Démonstration. 1. famille libre : Soit $I \subseteq \mathbb{N}$ un ensemble fini d'entiers.
Soit $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ une famille de scalaires indexée par I et telle que : $\sum_{i\in I} \lambda_i \dot{\bullet} \delta^i = (0)_{i\in\mathbb{N}}$. Soit $k \in I$, on optient au rang k, $\sum_{i\in I} \lambda_i \bullet \delta_k^i = 0$.
Puis $\lambda_k = 0$.

2. famille génératrice : Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^n$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ qui stationne en 0.
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$, $u_n = 0$.
On a donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^{n_0} u_k \bullet \delta_n^k$.

Puis $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{k=0}^{n_0} u_k \,\dot{\bullet}\, \delta^k$.

Ainsi, $(\delta^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel des suites à valeur dans $\mathbb{K}$, qui stationnent en 0, pour la somme et le produit externe point à point. $\square$

Proposition 16

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille d'éléments de E est une base de E si et seulement si c'est une famille libre maximale.

Démonstration. Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble et $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I.

- ($\Rightarrow$) On suppose que $(u_i)_{i\in I}$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, \bullet)$.
  Par la définition 4, $(u_i)_{i\in I}$ est une famille libre.
  Soit J un ensemble tel que $I \subseteq J$ et $(v_j)_{j\in J}$ une famille libre de $(E, +, \bullet)$ telle que pour tout $i \in I$, $u_i = v_i$.
  Supposons par l'absurde que $I \neq J$.
  Il existerait $j_0 \in J \setminus I$.
  Or, par la définition 4, $(u_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de $(E, +, \bullet)$.
  Puis, il existerait un sous-ensemble fini J' de I et une famille de scalaires $(\lambda_{j'})_{j'\in J'} \in E^{J'}$ tels que $v_{j_0} = \sum_{j'\in J'} \lambda_{j'} \bullet u_{j'}$.
  Puis, $v_{j_0} = \sum_{j'\in J'} \lambda_{j'} \bullet v_{j'}$. Ce qui est absurde car $(v_j)_{j\in J}$ est libre et $j_0 \notin J'$.
  Donc $J = I$, et $(u_i)_{i\in I}$ est bien une famille libre maximale.
- ($\Leftarrow$) On suppose que $(u_i)_{i\in I}$ est une famille libre maximale de $(E, +, \bullet)$.
  Par l'absurde, soit $u \in E$ un vecteur tel que $u \notin \mathrm{Vect}\,(u_i \mid i \in I)$.
  Soit I' un ensemble tel que $I' = I \uplus \{i_0\}$ (où i_0 est un indice qui n'est pas dans I).
  On pose $u_{i_0} := u$. Montrons que la famille $(u_{i'})_{i'\in I'}$ serait une famille libre.
  Soit J un sous-ensemble fini de I' et $(\lambda_j)_{j\in J} \in \mathbb{K}^J$ une famille de scalaires, tel que : $\sum_{j\in J} \lambda_j \bullet u_j = 0_E$.

  1. Si $i_0 \in J$ et $\lambda_{i_0} \neq 0$. Alors $u_{i_0} = \sum_{j\in J\setminus\{i_0\}} \frac{\lambda_j}{\lambda_{i_0}} \bullet u_j$. Ce qui est absurde car $u_{i_0} \notin \mathrm{Vect}\,(\{)u_i \mid i \in I\}$.
  2. Sinon. On a $\sum_{j\in J\setminus\{i_0\}} \lambda_j \bullet u_j = 0_E$. Puis, comme la famille $(u_i)_{i\in I}$ est libre, pour tout $j \in J$, $\lambda_j = 0$. Donc la famille $(u_{i'})_{i'\in I'}$ est libre.

  Donc la famille $(u_{i'})_{i'\in I'}$ est libre, ce qui est absurde car la famille $(u_i)_{i\in I}$ est maximale pour cette propriété.

$\square$

Proposition 17

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille d'éléments de E est une base de E si et seulement si c'est une famille génératrice minimale.

Démonstration. Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble et $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille de vecteurs de E indexée par I.

— ($\Rightarrow$) On suppose que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est une base de $(E, +, \bullet)$.
Par la définition 4, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice.
On suppose par l'absurde que cette famille n'est pas minimale.
Il existerait donc $J \subset I$ tel que $(u_j)_{j \in J}$ soit une famille génratrice de E.
Soit $i \in I \setminus J$.
Comme la famille $(u_j)_{j \in J}$ est une famille génératrice, il existerait un ensemble fini $K \subseteq J$ et une famille de scalaires $(\lambda_k)_{k \in K} \in \mathbb{K}^K$ indexée par K, tel que $u_i = \sum_{k \in K} \lambda_k \bullet u_k$.
En posant $\lambda_i := (-1)$, on aurait : $\sum_{k \in K \cup \{i\}} \lambda_k \bullet u_k = 0_E$.
Or l'ensemble $K \cup \{i\}$ est fini, $K \cup \{i\} \subseteq I$, et, par la définition 4, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre. Donc pour $k \in K \cup \{i\}$, on aurait : $\lambda_k = 0$. Ce qui est absurde, car, en particulier, $\lambda_i = -1$.

— ($\Leftarrow$) On suppose que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice minimale.
Montrons que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est une famille libre.
Soit J un ensemble fini d'indices et $(\lambda_j) \in \mathbb{K}^I$ une famille de scalaires tels que $\sum_{j \in J} \lambda_j \bullet u_j = 0_E$.
Par l'absurde, on suppose qu'il existe un indice $j_0 \in I$, tel que $\lambda_{j_0} \neq 0$.
On aurait donc, $u_{j_0} = \sum_{j \in J \setminus \{j_0\}} \frac{\lambda_j}{\lambda_{j_0}} \bullet u_j$.
On pourrait alors montrer que la famille $(u_j)_{j \in J \setminus \{j_0\}}$ serait génératrice :
Soit $u \in E$.
Comme $(u_i)_{i \in I}$ est génératrice, il existe un ensemble fini d'indices K et une famille de scalaires $(\mu_k)_{k \in K} \in \mathbb{K}^J$ indexée par K tel que $u = \sum_{k \in K} \mu_k \bullet u_k$.
Pour $k \in K \setminus J$, on pose $\lambda_k := 0$.
Pour $j \in J \setminus K$, on pose $\mu_j := 0$.
On aurait donc $u = \sum_{l \in (J \cup K) \setminus j_0} (\mu_{j_0} \cdot \lambda_l + \mu_l) \bullet u_l$.
Donc la famille $(u_i)_{i \in I \setminus \{j_0\}}$ serait une famille génératrice ce qui est absurde car $(u_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice minimale.

$\square$

Proposition 18

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit σ une bijection de I dans I. Soit $(v_i)_{i\in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_i = u_{\sigma(i)} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est une base de E si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est une base de E.

Démonstration. On procède par équivalence :
la famille $(u_i)_{i\in I}$ est une base de E
$\Leftrightarrow$ la famille $(u_i)_{i\in I}$ est libre dans E et génératrice de E (d'après la définition 4)
$\Leftrightarrow$ la famille $(v_i)_{i\in I}$ est libre dans E (d'après la propriété 3) et génératrice de E (d'après la propriété 12)
$\Leftrightarrow$ la famille $(v_i)_{i\in I}$ est une base de E (d'après la définition 4). $\square$

Proposition 19

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda \neq 0$ et $i_0 \in I$ un élément de I. Soit $(v_i)_{i\in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} = \lambda \bullet u_{i_0} & \\ v_i = u_i & \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est une base de E si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est une base de E.

Démonstration. On procède par équivalence :
la famille $(u_i)_{i\in I}$ est une base de E
$\Leftrightarrow$ la famille $(u_i)_{i\in I}$ est libre dans E et génératrice de E (d'après la définition 4)
$\Leftrightarrow$ la famille $(v_i)_{i\in I}$ est libre dans E (d'après la propriété 4) et génératrice de E (d'après la propriété 13)
$\Leftrightarrow$ la famille $(v_i)_{i\in I}$ est une base de E (d'après la définition 4). $\square$

Proposition 20

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soient $i_0 \in I$ et $j_0 \in I$ deux éléments de I. Soit $(v_i)_{i\in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} = u_{i_0} + u_{j_0} & \\ v_i = u_i & \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est base de E si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est une base de E.

Démonstration. On procède par équivalence : la famille $(u_i)_{i\in I}$ est une base de E
$\Leftrightarrow$ la famille $(u_i)_{i\in I}$ est libre dans E et génératrice de E (d'après la définition 4)
$\Leftrightarrow$ la famille $(v_i)_{i\in I}$ est libre dans E (d'après la propriété 5) et génératrice de E (d'après la propriété 14)
$\Leftrightarrow$ la famille $(v_i)_{i\in I}$ est une base de E (d'après la définition 4). $\square$

Proposition 21

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient $i_0 \in I$ et $j_0 \in I$ deux éléments de I tels que $i_0 \neq j_0$. Soit $(v_i)_{i\in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} = u_{i_0} + \lambda \bullet u_{j_0} & \\ v_i = u_i & \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est une base si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est une base.

Démonstration. On procède par équivalence : la famille $(u_i)_{i\in I}$ est une base de E
$\Leftrightarrow$ la famille $(u_i)_{i\in I}$ est libre dans E et génératrice de E (d'après la définition 4)
$\Leftrightarrow$ la famille $(v_i)_{i\in I}$ est libre dans E (d'après la propriété 6) et génératrice de E (d'après la propriété 15)
$\Leftrightarrow$ la famille $(v_i)_{i\in I}$ est une base de E (d'après la définition 4). $\square$

Théorème 2

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit J un ensemble fini. Soit I un sous-ensemble de J. Soit $(u_j)_{j\in J}$ une famille d'élément de E, tel que la famille

$(u_i)_{i\in I}$ soit une famille libre et la famille $(u_j)_{j\in J}$ soit une famille génératrice de E. Alors il existe un ensemble K tel que $I \subseteq K \subseteq J$ et la famille $(u_k)_{k\in K}$ est une base de E.

Démonstration. Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit J un ensemble fini. Soit I un sous-ensemble de J. Soit $(u_j)_{j\in J}$ une famille d'élément de E, tel que la famille $(u_i)_{i\in I}$ soit une famille libre et la famille $(u_j)_{j\in J}$ soit une famille génératrice de E.

On suppose que la famille $(u_j)_{j\in J}$ n'est pas une base de E. On considère l'ensemble de tous les ensembles J' tels que $I \subseteq J' \subseteq J$, et $(u_{j'})_{j'\in J'}$ soit une famille génératrice. Cet ensemble possède un élément minimal K pour l'inclusion.

Ainsi, la famille $(u_k)_{k\in K}$ est libre dans E.
Par l'absurde, supposons que ce ne soit pas le cas.

Il existerait donc une famille de scalaires $(\lambda_k)_{k\in K} \in \mathbb{K}^K$ non tous nuls telle que $\sum_{k\in K} \lambda_k \bullet u_k = 0_E$.

Puis il existerait nécessairement un indice $k_0 \in K \setminus I$ tel que $\lambda_{k_0} \neq 0$ (puisque $(u_i)_{i\in I}$ est libre).

Prenons $k_0 \in K \setminus I$ tel que $\lambda_{k_0} \neq 0$.

On aurait donc $u_{k_0} = \sum_{k\in K\setminus\{k_0\}} \frac{\lambda_k}{\lambda_{k_0}} \bullet u_k$.

Soit $u \in E$.

Comme $(u_k)_{k\in K}$ est une famille génératrice, il existerait une famille de scalaires $(\mu_k)_{k\in K}$ telle que $u = \sum_{k\in K} \mu_k \bullet u_k$.

Puis $u = \sum_{k\in K\setminus\{k_0\}} \left(\mu_k + \frac{\mu_{k_0}\times\lambda_k}{\lambda_{k_0}}\right) \bullet u_k$.

Donc la famille $(u_k)_{j\in K\setminus\{k_0\}}$ est une famille génératrice de E. Ce qui est absurde (par minimalité de K). $\square$

Remarque 2

Le théorème 2 est aussi valable si la famille génératrice est infini, si l'on suppose l'axiome du choix (Pour tout ensemble A, il existe une fonction $h_A : \wp(A) \to A$, telle que pour toute partie $X \subseteq A$, on ait : $h(X) \in X$).

Corollaire 1

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie. Alors, toute famille libre finie de $(E, +, \bullet)$ s'étend en une base.

Démonstration. Soit $(E,+,\bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie. Alors, soit I un ensemble fini et $(u_i)_{i\in I}$ une famille libre. Soit J un ensemble fini tel que $I\cap J=\emptyset$ et $(u_j)_{j\in J}$ une famille génératrice de E. On a $(u_i)_{i\in I\cup J}$ est une famille génératrice de E et $I\subseteq I\cup J$. De plus, l'ensemble $I\cup J$ est fini. Donc il existe un ensemble K tel que $I\subseteq K\subseteq J$ et $(u_k)_{k\in K}$ soit une base de E. $\square$

Corollaire 2

Soit $(E,+,\bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Toute famille génératrice finie de $(E,+,\bullet)$ contient une base.

Démonstration. Soit $(E,+,\bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit J un ensemble fini et $(u_j)_{j\in J}$ une famille génératrice de E. On note $I=\emptyset$. On a $(u_i)_{i\in I}$ est une famille libre et $I\subseteq J$. Donc il existe un ensemble K tel que $I\subseteq K\subseteq J$ et $(u_k)_{k\in K}$ soit une base de E. $\square$

Corollaire 3

Soit $(E,+,\bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie. Alors, toute famille libre finie de $(E,+,\bullet)$ s'étend en une base.

Démonstration. Soit I,J deux ensembles finis tels que $I\cap J=\emptyset$. Soit $(u_i)\in E^I$ une famille libre de $(E,+,\bullet)$ et $(u_j)\in E^J$ une famille génératrice de $(E,+,\bullet)$. Par la propriété 11, la famille $(u_k)_{k\in I\cup J}$ est une famille génératrice de $(E,+,\bullet)$. De plus, $I\cup J$ est un ensemble fini. Donc d'après le théorème 2, il existe K tel que $I\subseteq K\subseteq I\cup J$ et tel que $(u_k)_{k\in K}$ soit une base de E. Puis $(u_i)_{i\in I}$ s'étend en une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E,+,\bullet)$. $\square$

Proposition 22

Soit $(E,+,\bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui possède une famille génératrice de n vecteurs, alors toute famille qui possède au moins $n+1$ éléments de E est liée.

Démonstration. On procède par l'absurde. On prends le plus petit entier $n\in\mathbb{N}$ tel qu'il existe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec une famille génératrice de n éléments et une famille libre d'au moins $n+1$ éléments. Soit $(E,+,\bullet)$ un tel $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient I un ensemble, $(u_i)_{i\in I}$ une famille libre d'éléments de E et $(v_j)_{1\leq j\leq n}$ une famille génératrice de E.

1. si $n=0$, alors $E=\{0_E\}$, puis toutes les familles libres de E sont vides.

2. si $n = 1$, si I possède au moins deux indices i_1, i_2. Comme $(v_j)_{j=1}$ est une famille génératrice. Il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ tels que $u_{i_1} = \alpha \bullet v_1$ et $u_{i_2} = \beta \bullet v_2$. Puis $\alpha \bullet u_{i_2} - \beta \bullet u_{i_1} = 0_E$. Donc $\alpha = \beta = 0$. Ce qui est absurde.
3. On suppose la propriété vraie pour n_0, on suppose maintenant que $n = n_0 + 1$. Prenons un sous ensemble de I avec $n+1$ éléments, que l'on note $k_1, \ldots, k_{n+1}$.
   Comme $(v_j)_{1\leq j\leq n}$ est une famille génératrice, on peut choisir une famille $(\lambda_{i,j})_{1\leq i\leq n+1, 1\leq j\leq n}$ de scalaires de $\mathbb{K}$ telle que pour tout i entre 1 et $n+1$, on ait :
$$u_{k_i} = \sum_{1\leq j\leq n} \lambda_{i,j} \bullet v_j.$$
   (a) Si tous les scalaires $\lambda_{i,j}$ étaient nuls. Alors on aurait $u_1 = 0_E$ ce qui est absurde, par la propriété 22 et car la famille $(u_i)_{i\in I}$ est libre.
   (b) Soit, donc, i_0 entre 1 et m et j_0 entre 1 et n tel que $\lambda_{i_0,j_0} \neq 0$.
   La famille $(u_{k_i})_{1\leq i\leq n+1}$ est libre.
   Donc la famille $(w_i)_{1\leq i\leq n+1}$ où :
$$\begin{cases} w_{i_0} = u_{k_{i_0}} \\ w_i = \lambda_{i_0,j_0} \bullet u_{k_i} - \lambda_{i,i_0} \bullet u_{i_0} & \text{si } i \neq i_0 \end{cases}$$
   Puis, la famille libre $(w_i)_{1\leq i\leq n+1, i\neq i_0}$ est dans l'espace engendré par $(v_j)_{1\leq j\leq n, j\neq j_0}$.
   Ce qui est absurde car on a formé un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec une famille génératrice de $n-1$ vecteurs et une famille libre d'au moins n vecteurs.

□

Théorème 3

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie. Alors toutes les bases de $(E, +, \bullet)$ ont le même cardinal.

Démonstration. Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases $(E, +, \bullet)$.

Comme $\mathcal{B}$ est une base, par la définition 4, elle est donc libre. Comme E admet une famille génératrice finie, on en déduit par la propriété 22 que la famille $\mathcal{B}$ est finie. Avec le même raisonnement, nous déduisons que la famille $\mathcal{B}'$ est finie.

De plus, par la définition 4, $\mathcal{B}$ est une famille libre dans $(E, +, \bullet)$ et $\mathcal{B}'$ est une famille génératrice de $(E, +, \bullet)$. Ainsi, comme $(E, +, \bullet)$ admet une famille génératrice finie, par la propriété 22, $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{B}'|$. Puis en remplaçant $\mathcal{B}$ par $\mathcal{B}'$ et reciproquement, on obtient : $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$. $\square$

Définition 5

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie. On dit que $(E, +, \bullet)$ est de dimension finie et on appelle dimension de $(E, +, \bullet)$ le cardinal des bases de E.

Proposition 23

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini égale à n. Alors toute famille libre de n élément est une base.

Démonstration. Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini égale à n.
Soit I un ensemble de n éléments et $(u_i)_{i \in I}$ une famille libre de $(E, +, \bullet)$.
Donc par le corollaire 3, $(u_i)_{i \in I}$ s'étend en une base de $(E, +, \bullet)$. Or d'après le théorème 3, le cardinal de cette base est égale à n, il s'agit donc de $(u_i)_{i \in I}$. Ainsi $(u_i)_{i \in I}$ est une base. $\square$

Proposition 24

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini égale à n. Alors toute famille génératrice de n élément est une base.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel et soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini égale à n.
Soit I un ensemble de n éléments et $(u_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de $(E, +, \bullet)$.
Par le corollaire 2, $(u_i)_{i \in I}$ contient une base de $(E, +, \bullet)$. Or d'après le théorème 3, le cardinale de cette base est égale à n. Il s'agit donc de la famille $(u_i)_{i \in I}$. Ainsi $(u_i)_{i \in I}$ est une base. $\square$

Proposition 25

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit F un sous-espace vectoriels de $(E, +, \bullet)$. Si E et F sont de dimensions finies et égales. Alors $E = F$.

Démonstration. Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit F un sous-espace vectoriel de $(E, +, \bullet)$. On suppose que E et F sont de dimensions finies et égales.
Soit $(u_i)_{1 \leq i \leq \dim F}$ une base de F.
Par la définition 4, la famille $(u_i)_{1 \leq i \leq \dim E}$ est une famille libre dans $(F, +_{|F}, \bullet_{|})$.

La famille $(u_i)_{1\leq i\leq \dim E}$ est une famille libre de $(E, +, \bullet)$.
C'est donc une famille libre avec n éléments, donc, par la propriété 23, c'est une base de E.
Ainsi $(u_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E et de F.
Puis $E = \mathrm{Vect}(\{u_i \mid i \in I\})$ et $F = \mathrm{Vect}(\{u_i \mid i \in I\})$.
Puis $E = F$. □

Exemple 22

Le sous-espace de $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\bullet})$ engendré par l'ensemble $\{(1,1,0),(2,2,0)\}$ est dimension fini égal à 1.

Exemple 23

Le sous-espace de $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\bullet})$ engendré par l'ensemble $\{(1,1,0),(2,1,0)\}$ est dimension fini égal à 2.

Algorithme 3 : Comment trouver si une famille est libre ?

Soient n un entier positif dans $\mathbb{N}$. Soit $(u_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{K}^n)^n$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On note $u_{i,j}$ la j-ième coordonnée du i-ième vecteur de la famille $(u_i)_{1\leq i\leq n}$. L'algorithme suivant permet de décider si $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ est libre, ou liée.

Prendre $p \leftarrow 0$.

1. si $p = n$ alors la famille est une base.
2. si $p < n$ et si pour tout k tel que $p < k \leq n$, on ait $u_{k,p+1} = 0$ alors la famille n'est pas une base.
3. sinon, prendre k le plus petit entier strictement supérieur à p tel que $u_{k,p+1} \neq 0$.
4. Multiplier le vecteur u_k par l'inverse de $u_{k,p+1}$.
5. Soustraire à chaque vecteur $u_{k'}$ pour $k' \neq k$ le vecteur u_k multiplié par $u_{k,p+1}$.
6. Permuter le vecteur u_{p+1} et u_k.
7. Prendre $p \leftarrow p + 1$.
8. Retourner à l'étape 1.

Démonstration. Toutes les transformations préservent le fait d'être une base. On peut montrer, par récurrence, qu'à l'étape 1 $u_{k,l} = 0$ pour tout k, l tels que $k \neq l$,

$1 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq n$. Donc si $p = n$, on reconnaît l'exemple 18. Si le test de la seconde étape échoue, la famille n'est pas génératrice, donc elle n'est pas une base. Enfin, toutes les étapes de transformation préservent le fait d'être une base. $\square$

Exemple 24

On utiliser l'algorithme 2 pour montrer que la famille $((1,1,0),(-1,1,0),(1,1,1))$ est une base.

Démonstration. La famille $\begin{pmatrix} (1,1,0) \\ (-1,1,0) \\ (1,1,1) \end{pmatrix}$ est une base

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,1,0) \\ (0,2,0) \\ (0,0,1) \end{pmatrix}$ est une base (en utilisant les transformations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$)

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,1,0) \\ (0,1,0) \\ (0,0,1) \end{pmatrix}$ est une base (en utilisant la transformation $L_2 \leftarrow L_2/2$)

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,0,0) \\ (0,1,0) \\ (0,0,1) \end{pmatrix}$ est une base (en utilisant la transformation $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$)

Or cette dernière famille est une base (c'est l'exemple 18).

Donc la famille $((1,1,0),(-1,1,0),(1,1,1))$ est une base. $\square$

Exemple 25

On peut utiliser l'algorithme 2 pour montrer que la famille $((1,1,1),(-1,1,-1),(2,0,2))$ n'est pas une base.

Démonstration. La famille $\begin{pmatrix} (1,1,1) \\ (-1,1,-1) \\ (2,0,2) \end{pmatrix}$ est une base

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,1,1) \\ (0,2,0) \\ (0,-2,0) \end{pmatrix}$ est une base (en utilisant les transformations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2 \cdot L_1$)

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,1,1) \\ (0,1,0) \\ (0,-2,0) \end{pmatrix}$ est une base (en utilisant la transformation $L_2 \leftarrow L_2/2$)
si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,0,1) \\ (0,1,0) \\ (0,0,0) \end{pmatrix}$ est une base (en utilisant la transformation $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$)
Or cette dernière famille n'est pas une base car elle n'est pas libre (par la propriété 1).
Donc la famille $((1,1,1),(-1,1,-1),(2,0,2))$ n'est pas une famille génératrice, puis ce n'est pas une base. $\square$