Examen de mathématiques
Algèbre linéaire

Allons, courage et confiance !

1 Des multiplications

On se donne

$$A = \begin{pmatrix} \pi & \pi^2 & \pi^3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{5} & \sqrt{7} \\ \sqrt{11} & \sqrt{13} \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} e & e^2 \\ e^3 & e^4 \end{pmatrix}$$

1. Indiquer les produits valides :

$\times$	A	B	C
A			
B			
C			

La case (A, B) en ligne A et colonne B correspond au produit $A \times B$. Reproduisez le tableau sur la copie ou n'oubliez pas de rendre le sujet avec le nom !

2 Des matrices

Soit

$$f : \mathbb{C} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$
$$a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que $f(1) = I_2$.
3. Montrer que $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, f(zz') = f(z)f(z')$.
4. Trouver une condition sur a et b pour que $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ soit inversible.

5. En déduire une condition sur $z \in \mathbb{C}$ pour que $f(z)$ soit inversible.
6. Trouver la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ et en donner une base.
7. Soit $z \neq 0$. Justifier que $f(z^{-1}) = f(z)^{-1}$.
   On dit que f est un isomorphisme de corps.

3 Déterminant tridiagonal

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n la matrice de taille $n \times n$

$$A_n = \begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
1 & 1 & -1 & \ddots & & \vdots \\
0 & 1 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & 1 & 1 & \ddots & 0 \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

et D_n le déterminant de A_n.

1. Déterminer D_1 et D_2.
2. Calculer D_3 et D_4. On essaiera de trouver une façon qui se généralise.
3. Utiliser deux développements successifs pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, D_{n+2} = D_{n+1} + D_n$.

4 Matrice de Sylvester et résultant

Soit $P = aX^2 + bX + c$ et $Q = X - r$ avec $(a, b, c, r) \in \mathbb{C}^4$.

On note $S_{P,Q} = \begin{pmatrix} 1 & -r & 0 \\ 0 & 1 & -r \\ a & b & c \end{pmatrix}$ (appelée matrice de Sylvester de P et Q) et $R_{P,Q}$ le déterminant de $S_{P,Q}$ (appelé résultant de P et Q).

1. Montrer que r est une racine de P si et seulement si $R_{P,Q} = 0$

Maintenant, on passe à $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On a alors

$$S_{P,Q} = \begin{pmatrix} 1 & -r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -r \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

2. Même chose : montrer que r est racine de P si et seulement si $R_{P,Q} = 0$.

5 Des sous espaces

On se place dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note I l'ensemble des fonctions impaires de E et P l'ensemble des fonctions paires de E.

1. Montrer que I et P sont des sous-espaces vectoriels de E.