Examen de mathématiques
Algèbre linéaire

Allons, courage et confiance !

1 Des multiplications

On se donne

$$A = \begin{pmatrix} \pi & \pi^2 & \pi^3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{5} & \sqrt{7} \\ \sqrt{11} & \sqrt{13} \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} e & e^2 \\ e^3 & e^4 \end{pmatrix}$$

1. Indiquer les produits valides :

$\times$	A	B	C
A			
B			
C			

La case (A, B) en ligne A et colonne B correspond au produit $A \times B$. Reproduisez le tableau sur la copie ou n'oubliez pas de rendre le sujet avec le nom !

Solution:

$\times$	A	B	C
A		X	
B			X
C			X

2 Des matrices

Soit

$$f : \mathbb{C} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$
$$a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est linéaire.

Solution: Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$

$$\begin{aligned}
f(z + \lambda z') &= \begin{pmatrix} a + \lambda a' & b + \lambda b' \\ -b - \lambda b' & a + \lambda a' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda a' & \lambda b' \\ -\lambda b' & \lambda a' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} \\
&= f(z) + \lambda f(z')
\end{aligned}$$

2. Montrer que $f(1) = I_2$.
3. Montrer que $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, f(zz') = f(z)f(z')$.

Solution: On note $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$.

$$\begin{aligned}
f(zz') &= f(aa' - bb' + i(a'b + ab')) \\
&= \begin{pmatrix} aa' - bb' & a'b + ab' \\ a'b + ab' & aa' - bb' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} aa' - bb' & a'b + ab' \\ a'b + ab' & aa' - bb' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
f(z)f(z') &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} aa' - bb' & a'b + ab' \\ a'b + ab' & aa' - bb' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

4. Trouver une condition sur a et b pour que $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ soit inversible.

Solution: Il faut que le déterminant soit non nul. Le déterminant est $a^2 + b^2$. Donc il est nul si et seulement si $a = 0$ et $b = 0$. Donc si $(a, b) \neq (0, 0)$, la matrice est inversible.

5. En déduire une condition sur $z \in \mathbb{C}$ pour que $f(z)$ soit inversible.

Solution: Il suffit que $z \neq 0$.

6. Trouver la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ et en donner une base.

Solution: $\mathsf{Im}(f)$ est évidemment de dimension 2. De plus,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

7. Soit $z \neq 0$. Justifier que $f(z^{-1}) = f(z)^{-1}$.

Solution: On a $f(z)f(z^{-1}) = f(zz^{-1}) = f(1) = I_2$, donc $f(z^{-1}) = f(z)^{-1}$.

On dit que f est un isomorphisme de corps.

3 Déterminant tridiagonal

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n la matrice de taille $n \times n$

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et D_n le déterminant de A_n.

1. Déterminer D_1 et D_2.

Solution: $D_1 = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1$ et $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - (-1) \times 1 = 1 + 1 = 2.$

2. Calculer D_3 et D_4. On essaiera de trouver une façon qui se généralise.
3. Utiliser deux développements successifs pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, D_{n+2} = D_{n+1} + D_n$.

Solution:

$$
\begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
1 & 1 & -1 & \ddots & & \vdots \\
0 & 1 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & 1 & 1 & \ddots & 0 \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & -1 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\
0 & 1 & 1 & \ddots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\
0 & \cdots & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
+
\begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 1 & -1 & \ddots & & \vdots \\
\vdots & 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
= D_{n-1} +
\begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\
0 & \cdots & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
= D_{n-1} + D_{n-2}
$$

4 Matrice de Sylvester et résultant

Soit $P = aX^2 + bX + c$ et $Q = X - r$ avec $(a, b, c, r) \in \mathbb{C}^4$.

On note $S_{P,Q} = \begin{pmatrix} 1 & -r & 0 \\ 0 & 1 & -r \\ a & b & c \end{pmatrix}$ (appelée matrice de Sylvester de P et Q) et $R_{P,Q}$

le déterminant de $S_{P,Q}$ (appelé résultant de P et Q).

1. Montrer que r est une racine de P si et seulement si $R_{P,Q} = 0$

Solution:

$$\begin{aligned} R_{P,Q} &= c + ar^2 + 0 - 0 - 0 - b(-r) \\ &= ar^2 + br + c \end{aligned}$$

Maintenant, on passe à $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On a alors

$$S_{P,Q} = \begin{pmatrix} 1 & -r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -r \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

2. Même chose : montrer que r est racine de P si et seulement si $R_{P,Q} = 0$.

Solution:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -r \\ a & b & c & d \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & -r & 0 \\ 0 & 1 & -r \\ b & c & d \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} -r & 0 & 0 \\ 1 & -r & 0 \\ 0 & 1 & -r \end{vmatrix} \\ &= br^2 + cr + d - a(-r)^3 \\ &= ar^3 + br^2 + cr + d \end{aligned}$$

5 Des sous espaces

On se place dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note I l'ensemble des fonctions impaires de E et P l'ensemble des fonctions paires de E.

1. Montrer que I et P sont des sous-espaces vectoriels de E.

Solution: Soit f et g des fonctions impaires et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(f+\lambda g)(-x) &= f(-x)+\lambda g(-x)\\ &= -f(x)-\lambda g(x)\\ &= -(f(x)+\lambda g(x))\\ &= -(f+\lambda g)(x)\end{aligned}$$

Donc $f+\lambda g$ est impaire. Donc I est bien un sev de E. De même pour P.