Problèmes d'algèbre linéaire

Exercice 1 : Espaces et sous espaces vectoriels et morphismes

1. Montrer que l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition et la multiplication par un réel, est un espace vectoriel. On le notera E.
2. Montrer que l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de E. On le notera P.
3. Montrer que l'ensemble des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de E. On le notera I.
4. Soit $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique paire $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ telle que $a + b = f(x)$ et $a - b = f(-x)$. En déduire qu'il existe une unique paire $(p, i) \in P \times I$ telle que $p + i = f$. On dit que P et I sont supplémentaires.
5. On note π_P (resp. π_I) la fonction qui à f associe p (resp. i) tel que défini cidessus. Montrer que π_P et π_I sont linéaires. Trouver leurs noyaux et images.
6. Déterminer $\pi_P \circ \pi_P$, $\pi_I \circ \pi_I$, $\pi_I \circ \pi_P$ et $\pi_P \circ \pi_I$.

Exercice 2 : Familles de vecteurs

1. Soit P et Q des polynômes à coefficients complexes (en toute généralité). Montrer que si $\deg(P + Q) < \max(\deg P, \deg Q)$, alors $\deg P = \deg Q$. Montrer aussi que si $\deg P \neq \deg Q$, alors $\deg(P + Q) = \max(\deg P, \deg Q)$.

   On choisit $n \in \mathbb{N}$. On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$, des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.
2. Rappeler la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ et sa base canonique.

   Soit $k \in \mathbb{N}$. On appelle famille de polynômes échelonnée en degré une famille $(P_i)_{i \in [\![0,k]\!]}$ telle que $\forall i \in [\![0, k-1]\!], \deg P_i < \deg P_{i+1}$.
3. Soit $(P_i)_{i \in [\![0,k]\!]}$ et une famille échelonnée de polynômes et $(a_i)_{i \in [\![0,k]\!]}$ une famille de réels. En supposant $a_k \neq 0$, quel est le degré et le coefficient dominant de $S = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i P_i$. En déduire que $S \neq 0$.

4. En déduire que la famille $(P_i)_{i \in [\![0,k]\!]}$ est libre.
5. On prend $(P_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ une famille échelonnée de $n+1$ polynômes. Montrer que $(P_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   On définit la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes par

$$\begin{aligned} T_0 &= 1 \\ T_1 &= X \\ \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} &= 2XT_{n+1} - T_n \end{aligned}$$

6. Pour tout n naturel, quel est le degré de T_n ?
7. Montrer que pour tout entier naturel n, la famille $(T_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.