Problèmes d'algèbre linéaire

Exercice 1 : Espaces et sous espaces vectoriels et morphismes

1. Montrer que l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition et la multiplication par un réel, est un espace vectoriel. On le notera E.

Solution: Soit $(f,g) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

— $+$ est commutative et associative.
— $x \mapsto 0$ est neutre pour $+$.
— $-f$ est le symétrique de f pour $+$.
— $f+g$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
— λf est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
— $(\lambda+\mu)f = \lambda f + \mu f$.
— $1f = f$.
— $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$.
— $(\lambda\mu)f = \lambda(\mu f)$.

$\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}},+,\cdot\right)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. Montrer que l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de E. On le notera P.

Solution: Il s'agit des fonctions qui vérifient $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$.
C'est à dire $x \mapsto f(x) - f(-x)$ est nulle.
Montrons que $s : f \mapsto (x \mapsto f(-x))$ est un endomorphisme. On a bien $s(f+g) = s(f) + s(g)$ et $s(\lambda f) = \lambda f(s)$.
$x \mapsto f(x) - f(-x)$ est donc un morphisme et P est son noyau. P est donc un sous-espace vectoriel de E.

3. Montrer que l'ensemble des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de E. On le notera I.

Solution: I est le noyau de $x \mapsto f(x) + f(-x)$.

4. Soit $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique paire $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ telle que $a + b = f(x)$ et $a - b = f(-x)$. En déduire qu'il existe une unique paire $(p, i) \in P \times I$ telle que $p + i = f$. On dit que P et I sont supplémentaires.

Solution: On trouve $a = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $b = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Cette solution existe et est unique.

Si on pose $p : x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $i : x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. $p \in P, i \in I$ et $i + p = f$. i et p sont donc uniques.

5. On note π_P (resp. π_I) la fonction qui à f associe p (resp. i) tel que défini ci-dessus. Montrer que π_P et π_I sont linéaires. Trouver leurs noyaux et images.

Solution: $f \mapsto (x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2})$ et $f \mapsto (x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2})$ sont manifestement linéaires.

6. Déterminer $\pi_P \circ \pi_P$, $\pi_I \circ \pi_I$, $\pi_I \circ \pi_P$ et $\pi_P \circ \pi_I$.

Solution: Soit $p \in P$ et $i \in I$. $p \in E$. La fonction nulle est impaire. p se décompose donc en p et 0. Cette décomposition étant unique. $\pi_P(p) = p$. Donc $\pi_P \circ \pi_P = \pi_P$. De même $\pi_I \circ \pi_I = \pi_I$. On dit que π_I et π_P sont des projecteurs.

On trouve aussi que $\pi_I(p) = 0$. Donc $\pi_I \circ \pi_P = 0$, et de même $\pi_P \circ \pi_I = 0$. On dit que ce sont des projecteurs associés.

Exercice 2 : Familles de vecteurs

1. Soit P et Q des polynômes à coefficients complexes (en toute généralité). Montrer que si $\deg(P + Q) < \max(\deg P, \deg Q)$, alors $\deg P = \deg Q$. Montrer aussi que si $\deg P \neq \deg Q$, alors $\deg(P + Q) = \max(\deg P, \deg Q)$.

Solution: Les deux propositions sont contraposées, donc équivalentes. On va prouver la seconde. On note p le degré de P et q le degré de Q. Quitte à échanger P et Q, on suppose que $p > q$. On peut écrire

$$P = a_p X^p + \tilde{P}$$

avec $a_p \neq 0$ et $\deg \tilde{P} \leqslant p-1$. Or, $q \leqslant p-1$. Donc $P+Q$ est $a_p X^p + \tilde{P} + Q$ et $\deg\left(\tilde{P}+Q\right) \leqslant p-1$. Donc $P+Q$ est de degré p, ce qui est bien $\max(p,q)$.

On choisit $n \in \mathbb{N}$. On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$, des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.

2. Rappeler la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ et sa base canonique.

Solution: Dimension = $n+1$ et la base canonique est $1, X, X^2, X^3, \ldots, X^n$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On appelle famille de polynômes échelonnée en degré une famille $(P_i)_{i \in [\![0,k]\!]}$ telle que $\forall i \in [\![0, k-1]\!], \deg P_i < \deg P_{i+1}$.

3. Soit $(P_i)_{i \in [\![0,k]\!]}$ et une famille échelonnée de polynômes et $(a_i)_{i \in [\![0,k]\!]}$ une famille de réels. En supposant $a_k \neq 0$, quel est le degré et le coefficient dominant de $S = \sum_{i=0}^{k} a_i P_i$. En déduire que $S \neq 0$.

Solution: Le degré de P_k est strictement plus grand le degré de tous les autres polynômes de la famille. Donc S est de degré $\deg P_k$. Et si on note c le coefficient dominant de P_k, le coefficient dominant de Q est $a_k c$.
Or a_k et c sont non nuls, donc S est non nul.

4. En déduire que la famille $(P_i)_{i \in [\![0,k]\!]}$ est libre.

Solution: Pour savoir si P_i est libre, supposons que $S = 0$, il vient par contraposé que $a_k = 0$. On en est réduit à montrer la liberté de $(P_i)_{i \in [\![0,k-1]\!]}$, puisque $S = \sum_{i=0}^{k-1} a_i P_i$. Par une récurrence évidente, $S = 0$ si et seulement si, $\forall i \in [\![0, k]\!], a_i = 0$. Donc la famille $(P_i)_{i \in [\![0,k]\!]}$ est libre.

5. On prend $(P_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ une famille échelonnée de $n+1$ polynômes. Montrer que $(P_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution: Famille libre de $n+1$ vecteurs dans un espace de dimension $n+1$. C'est une base.

On définit la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes par

$$T_0 = 1$$
$$T_1 = X$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

6. Pour tout n naturel, quel est le degré de T_n ?

Solution: On prouve par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(T_n) = n$. Le prédicat est trivialement vrai aux rangs 0 et 1. L'hérédité est correcte car T_{n+1} est de degré $n+1$, donc $2XT_{n+1}$ est de degré $n+2$. Alors que $-T_n$ qu'est que de degré n. Donc la somme est de degré $n+2$.

7. Montrer que pour tout entier naturel n, la famille $(T_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution: C'est une famille échelonnée de $n+1$ vecteurs.