Test d'algèbre linéaire

1 Sans calcul

Toute cette section peut se faire sans calcul, ou très très succinct, le genre de calcul qu'on n'écrit même pas.

1. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Est-ce que la famille composée des 4 vecteurs

$$\begin{gathered}(1,1,7)\\(\pi,\pi^2,\pi^3)\\(1,-1,1)\\(0,0,1)\end{gathered}$$

est libre ?

Solution: Non. $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 et la famille comporte 4 vecteurs. Elle n'est donc pas libre.

2. Toujours dans $\mathbb{R}^3$, justifier que $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 2y + 3z = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Solution: F est le noyau de l'application linéaire $(x,y,z) \mapsto x + 2y + 3z$. Or un noyau est toujours un sous espace vectoriel.

3. Montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 0 & 7\\0 & 0 & 12\end{pmatrix}$$

n'est pas inversible.

Solution: La matrice est triangulaire, son déterminant est le produit des coefficients diagonaux, ici 0. Donc la matrice n'est pas inversible.

2 Du calcul

N'oubliez pas de justifier un minimum le résultat soit en détaillant le calcul, soit en évoquant la méthode utilisée, soit en vérifiant le résultat *a posteriori* (si applicable). Les intermédiaires de calculs ne sont pas strictement nécessaires, mais conseillés. Surtout si le résultat est incorrect.

1. Trouver l'inverse de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution: On résout

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1 \\ x_2 = y_2 \end{cases}$$

On a donc immédiatement $y_2 = x_2$, puis il vient $x_1 = y_1 - 2y_2$. Donc l'inverse est

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. (a) On se donne

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et on suppose connu que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $A = PDP^{-1}$.

Solution:

$$\begin{aligned} PDP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

Nickel !

(b) Calculer A^k.

Solution: On sait que $A^k = PD^kP^{-1}$ et $D^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ D'où

$$\begin{aligned} A^k &= PD^kP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & -2^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^k & 1 - 2^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$