DM de logique, théorie des ensembles et fonction

Rendez les exercices dans l'ordre ou chacun sur une feuille séparée (pas tous ensemble en vrac). Ne perdez pas de temps sur les bonus : ce sont des questions intéressantes, mais parfois plus difficiles.

Le barème est indicatif. Il n'est pas nécessaire de tout faire pour obtenir une bonne note. Comme le DM est assez long, la notation sera probablement non linéaire.

À rendre en groupe de 1 à 2.

Ne vous retenez pas de le faire en LaTeX si vous le sentez. Vous gagnerez le bonus de l'indulgence du correcteur.

Exercice 1 : Logique propositionnelle (20 points)

1. Montrer que
$$\big((\bot \Rightarrow P) \Rightarrow P\big) \equiv P$$
2. Écrire la négation des formules suivantes :
   1. $(P \Rightarrow Q)$
   2. $\big(P \wedge (\neg Q)\big)$
   3. $\big(P \wedge (Q \wedge R)\big)$
   4. $\big(P \vee (Q \wedge R)\big)$
   5. $\big((P \wedge Q) \Rightarrow (R \Rightarrow S)\big)$
3. Prouver
$$(A \wedge A) \equiv A$$
$$(A \vee A) \equiv A$$
C'est l'idempotence de $\wedge$ et $\vee$.
4. Soit φ la formule
$$\Bigg(\Big(\big((\neg R) \Rightarrow (\neg Q)\big) \Rightarrow P\Big) \wedge (Q \Rightarrow R)\Bigg)$$
   (a) Écrire φ sous forme d'arbre

(b) Donner la table de vérité de φ

(c) Cette formule est-elle une tautologie ? Justifier.

(d) Cette formule est-elle une contradiction ? Justifier.

5. Dans cette question, on va se donner pour but de prouver qu'il existe au moins une formule pour n'importe quelle fonction des variables dans $\{tt, ff\}$
On pose $\mathcal{A} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un alphabet de n variables logiques.
   (a) Trouver une formule qui ne soit vraie que pour une unique assignation des variables $x_1 = v_1, \ldots, x_n = v_n$ et fausse dans tous les autres cas. On pourra illustrer sur des exemples.
   (b) Soit $f : \mathcal{A} \to \{tt, ff\}$. Se convaincre qu'on peut écrire f comme la disjonction $f_1 \vee \ldots \vee f_m$ d'un certain nombre de fonctions f_i qui ne sont vraies que pour une unique assignation. Conclure. Exemples aussi.

Exercice 2 : Fonctions (15 points)

1. Soit
$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A$$
On suppose que $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ sont injectives et $f \circ h \circ g$ est surjective. Montrer que f, g et h sont bijectives.
2. Soit
$$\begin{aligned} f : [1; +\infty[&\to [0; +\infty[\\ x &\mapsto x^2 - 1 \end{aligned}$$
f est elle injective, surjective, bijective ?
3. (5 points bonus) Trouver une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 : Relations (15 points)

1. On dit que m divise n, et on écrit $m|n$ si $\exists k \in \mathbb{Z} : mk = n$. La relation "divise" est-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$? Sur $\mathbb{Z}$? Est-elle totale ?
2. Trouver le(s) plus petit(s) et plus grand(s) éléments de $\mathbb{N}$ selon la relation $|$.
3. (5 points bonus) Cet ordre est il bien fondé ?

Exercice 4 : Théorie des ensembles (15 points)

1. Dessiner les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$
   (a) $\complement\left(\mathbb{R}\times[-1;1]\right)$
   (b) $\left([-1,1]\times\mathbb{R}\right)\Delta\left(\mathbb{R}\times[-1,1]\right)$
   (c) $\left\{(a,b)\in\mathbb{Z}^2 \,\middle|\, a^2+\frac{1}{4}b^2\leqslant 4\right\}$
2. (5 points bonus) (a) Montrer qu'il existe une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$.
   (b) On pose $A=\left\{x\in E \,\middle|\, x\notin f(x)\right\}$. S'en servir pour montrer l'absence de bijection de E dans $\mathcal{P}(E)$ (théorème de CANTOR).

Exercice 5 : Récurrence (15 points)

1. On définit la fonction $\mathscr{A}$ d'ACKERMANN-PÉTER par

$$\begin{aligned}\mathscr{A} : \mathbb{N}^2 &\to \mathbb{N}\\ (m,n) &\mapsto \begin{cases} n+1 & \text{si } m=0\\ \mathscr{A}(m-1,1) & \text{si } m>0 \text{ et } n=0\\ \mathscr{A}(m-1,\mathscr{A}(m,n-1)) & \text{si } m>0 \text{ et } n>0\end{cases}\end{aligned}$$

   (a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, \mathscr{A}(1,n)=2+(n+3)-3$.
   (b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, \mathscr{A}(2,n)=2(n+3)-3$.
2. On pose

$$\begin{aligned}H_n : \mathbb{N}^2 &\to \mathbb{N}\\ (a,b) &\mapsto \begin{cases} b+1 & \text{si } n=0\\ a & \text{si } n=1 \text{ et } b=0\\ 0 & \text{si } n=2 \text{ et } b=0\\ 1 & \text{si } n\geqslant 3 \text{ et } b=0\\ H_{n-1}(a,H_n(a,b-1)) & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned}$$

   (a) Montrer que $\forall(a,b)\in\mathbb{N}^2, H_1(a,b)=a+b$.
   (b) Montrer que $\forall(a,b)\in\mathbb{N}^2, H_2(a,b)=ab$.

(c) Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2, H_3(a,b) = a^b$.

(d) Comprendre comment ça continue : H_n est l'itéré de l'opérateur H_{n-1}. Ne pas hésiter à me demander si besoin.

(e) Montrer
$$\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, H_i(2,1) = 2$$

(f) Montrer
$$\forall i \in \mathbb{N}^*, H_i\left(2,2\right) = 4$$

(g) (5 points bonus) Trouver un ordre $\sqsubseteq$ sur $\mathbb{N}^2$ tel que
$$\forall (n,m,k) \in \mathbb{N}^3, \begin{cases} (m,k) & \sqsubseteq (m+1,n) \text{ et} \\ (m,n) & \sqsubseteq (m,n+1) \end{cases}$$

(h) (5 points bonus) Montrer que cet ordre est bien fondé.

(i) (5 points bonus) Montrer que
$$\forall \left(m,n\right) \in \mathbb{N}^2, \mathscr{A}\left(m,n\right) = H_m\left(2,n+3\right) - 3$$