TD1 : logique propositionnelle (LP_0)

Exercice 1: Des tables

Trouvez des formules en fonction de A et B correspondantes aux tables suivantes :

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	$[\varphi_1]_\sigma$	$[\varphi_2]_\sigma$	$[\varphi_3]_\sigma$	$[\varphi_4]_\sigma$	$[\varphi_5]_\sigma$	$[\varphi_6]_\sigma$
ff	ff	ff	tt	ff	tt	tt	ff
ff	tt	ff	ff	tt	tt	tt	tt
tt	ff	ff	ff	tt	ff	tt	ff
tt	tt	tt	ff	ff	tt	tt	tt

Solution: Les solutions ne sont pas uniques. Je donne juste des solutions simples.

— $\varphi_1 = (A \wedge B)$
— $\varphi_2 = \big(\neg(A \vee B)\big)$
— $\varphi_3 = \big(\neg(A \Leftrightarrow B)\big)$
— $\varphi_4 = (A \Rightarrow B)$
— $\varphi_5 = \top$
— $\varphi_6 = B$

Exercice 2: Des formules

Écrire les tables de

(a) $(\neg A)$

(b) $\big(\neg(A \wedge B)\big)$

(c) $\Big((A \wedge B) \vee \big((\neg A) \wedge (\neg B)\big)\Big)$

Solution:

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	$[(\neg A)]_\sigma$	$\Big[\big(\neg(A \wedge B)\big)\Big]_\sigma$	$\Big[\Big((A \wedge B) \vee \big((\neg A) \wedge (\neg B)\big)\Big)\Big]_\sigma$
ff	ff	tt	tt	tt
ff	tt	tt	tt	ff
tt	ff	ff	tt	ff
tt	tt	ff	ff	tt

Exercice 3: En langage naturel

Les propositions suivantes sont elles vraies, ou non ?

(a) Le fait que Napoléon soit mort implique qu'il a gagné la bataille de Waterloo.

(b) Le fait que l'un de vos professeurs de mathématiques soit la reine d'Angleterre implique qu'un de vos professeurs de biologie est le roi d'Espagne.

(c) Le fait que je vais gagner au loto au moins une fois dans ma vie implique que l'eau ça mouille.

Solution:

(a) A = « Napoléon est mort » ; B = « Napoléon a gagné la bataille de Waterloo » A est vrai (Napoléon est mort le 5 mai 1821 sur l'île de Saint-Hélène dans la Longwood House) ; B est faux (Napoléon a perdu la bataille de Waterloo le 18 juin 1815 contre la perfide albion, l'Irlande, la Prusse, les Pays-Bas et quelques duchés et royaumes moins connus) $(A \Rightarrow B)$ est faux. Donc la phrase est fausse.

(b) A = « Un de vos professeurs de mathématiques est la reine d'Angleterre » ; B = « Un de vos professeurs de biologie est le roi d'Espagne ». A et B sont (probablement) faux. Donc $(A \Rightarrow B)$ est vrai.

(c) A = « Je vais gagner au loto au moins une fois dans ma vie » ; B = « L'eau mouille ». A est probablement faux, mais peut aussi bien être vrai. On va dire que les deux cas sont possibles. B est vrai. $(A \Rightarrow B)$ est vrai que A soit vrai ou faux. Donc la phrase est vraie, même pour les plus pessimistes d'entre nous.

Exercice 4:

Un inspecteur des services de santé visite un hôpital psychiatrique où des phénomènes étranges lui ont été signalés. Dans cet hôpital, il n'y a que des malades et des médecins, mais les uns comme les autres peuvent être sains d'esprit ou totalement fous. L'inspecteur doit faire sortir de l'hôpital les personnes qui n'ont rien à y faire, c'est à dire les malades sains d'esprit et les médecins totalement fous (quitte à les réintégrer ultérieurement en tant que malades. . .). Il part du principe que les personnes saines d'esprit ne disent que des choses vraies, alors que les personnes folles ne disent que des choses fausses. Dans une salle, il rencontre deux personnes (appelons-les A et B pour préserver leur anonymat). A affirme que B est fou et B affirme que A est médecin.

Après une intense réflexion, l'inspecteur fait sortir l'un des deux de l'hôpital. Lequel (et pourquoi ?)

Peut-il dire quelque chose au sujet de l'autre ?

Solution:

— α : A est médecin

— β : A est fou
— γ : B est médecin
— δ : B est fou
— $\varepsilon = (\alpha \Leftrightarrow \beta)$: A doit sortir
— $\zeta = (\gamma \Leftrightarrow \delta)$: B doit sortir
— $\eta = \Big(\neg(\beta \Leftrightarrow \delta)\Big)$: A dit que B est fou
— $\theta = \big(\neg(\alpha \Leftrightarrow \delta)\big)$: B dit que A est médecin

On sait que η et θ sont vrais.

$[\alpha]_\sigma$	$[\beta]_\sigma$	$[\gamma]_\sigma$	$[\delta]_\sigma$	$[\varepsilon]_\sigma$	$[\zeta]_\sigma$	$[\eta]_\sigma$	$[\theta]_\sigma$
ff	ff	ff	ff	tt	tt	ff	ff
ff	ff	ff	tt	tt	ff	tt	tt
ff	ff	tt	ff	tt	ff	ff	ff
ff	ff	tt	tt	tt	tt	tt	tt
ff	tt	ff	ff	ff	tt	tt	ff
ff	tt	ff	tt	ff	ff	ff	tt
ff	tt	tt	ff	ff	ff	tt	ff
ff	tt	tt	tt	ff	tt	ff	tt
tt	ff	ff	ff	ff	tt	ff	tt
tt	ff	ff	tt	ff	ff	tt	ff
tt	ff	tt	ff	ff	ff	ff	tt
tt	ff	tt	tt	ff	tt	tt	ff
tt	tt	ff	ff	tt	tt	tt	tt
tt	tt	ff	tt	tt	ff	ff	ff
tt	tt	tt	ff	tt	ff	tt	tt
tt	tt	tt	tt	tt	tt	ff	ff

Pfiou !

Il suffit de regarder tous les cas où η et θ sont vrais. Il y a 4 cas. Dans ces 4 cas, ε est vraie, alors que ζ prend les deux valeurs. Donc A doit sortir et on ne peut rien dire sur B.