

TD2 : Relations d'ordre et d'équivalence (avec corrigé)

Exercice 1:

- (a) Prouvez que la relation sur
- \mathbb{Z}

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a - b \text{ est un multiple de } 5$$

est une relation d'équivalence.

- (b) Soit
- $x \in \mathbb{Z}$
- . Déterminer
- $\text{cl}(x)$
- .

Exercice 2:

- (a) Prouver que la relation sur
- \mathbb{Z}

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a + b \text{ est pair}$$

est une relation d'équivalence.

- (b) Soit
- $x \in \mathbb{Z}$
- . Déterminer
- $\text{cl}(x)$
- .

Exercice 3:

- (a) Prouver que la relation sur
- $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow ad = cb$$

est une relation d'équivalence.

- (b) Soit
- $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$
- . Déterminer
- $\text{cl}((a,b))$
- .

Exercice 4:

- (a) Prouver que la relation sur
- \mathbb{R}

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow |a| = |b|$$

est une relation d'équivalence.

- (b) Soit
- $x \in \mathbb{R}$
- . Déterminer
- $\text{cl}(x)$
- .

Exercice 5:

- (a) Prouver que la relation sur
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow a \leq c \text{ et } b \leq d$$

est une relation d'ordre.

- (b) Prouver que cet ordre est bien fondé.

Exercice 6:

- (a) Soit
- E
- un ensemble fini. Prouver que la relation sur
- $\mathcal{P}(E)$

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \subseteq y$$

est une relation d'ordre.

- (b) Prouver que cet ordre est bien fondé.