TD2 : Relations d'ordre et d'équivalence (avec corrigé)

Exercice 1:

(a) Prouvez que la relation sur $\mathbb{Z}$

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a-b \text{ est un multiple de } 5$$

est une relation d'équivalence.

Solution: On vérifie les 3 conditions :

- Réflexivité : Soit $x \in \mathbb{Z}$. On veut prouver $x\mathcal{R}x$, c'est à dire $x-$ est un multiple de 5.On a $x - x = 0 = 5 \times 0$. Par conséquent, $x - x$ est un multiple de 5, donc $x\mathcal{R}x$.
- Symétrie : Soit $x, y \in \mathbb{Z}$. On suppose $x\mathcal{R}y$ (ie. $x - y$ est un multiple de 5). On veut prouver $y\mathcal{R}x$ (ie. $y - x$ est un multiple de 5). Or $y - x = -(x - y)$. Or, comme $x - y$ est un multiple de 5, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = 5k$. Donc $y - x = -5k$. Donc $y - x$ est un multiple de 5. Donc $y\mathcal{R}x$.
- Transitivité : Soit $x, y, z \in \mathbb{Z}$. On suppose $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. On veut prouver $x\mathcal{R}z$. On a par hypothèse

$$\begin{aligned} x - y &= 5m \\ y - z &= 5n \end{aligned}$$

Pour certains m et $n \in \mathbb{Z}$. En sommant terme à terme, on trouve

$$\begin{aligned} &(x-y)+(y-z) = 5m+5n \\ \Leftrightarrow &x + (-y+y) - z = 5(m+n) \\ \Leftrightarrow &x - z = 5(m+n) \\ \Leftrightarrow &x\mathcal{R}z \end{aligned}$$

Les 3 conditions sont bien vérifiées, c'est une relation d'équivalence.

(b) Soit $x \in \mathbb{Z}$. Déterminer cl (x).

Solution: On procède par double implication :

- Soit $y \in \mathbb{Z}$. On suppose $x\mathcal{R}y$. Il existe donc k tel que

$$\begin{aligned} x - y = 5k &\Leftrightarrow y - x = -5k \\ &\Leftrightarrow y = x - 5k \end{aligned}$$

Donc tout y en relation avec x est de la forme $y = x - 5k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

— Réciproquement, soit y de la forme $x - 5k$ Prouvons que $x\mathcal{R}y$

$$\begin{aligned} x - y &= x - (x - 5k) \\ &= x - x + 5k \\ &= 5k \end{aligned}$$

Donc $x - y$ est un multiple de 5 donc $x\mathcal{R}y$. Par conséquent, tout nombre de la forme $x - 5k$ est en relation avec x.

Par double implication, la classe d'équivalence de x est l'ensemble des nombres de la forme $x - 5k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2:

(a) Prouver que la relation sur $\mathbb{Z}$

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a + b \text{ est pair}$$

est une relation d'équivalence.

Solution:

— Réflexivité : Soit $x \in \mathbb{Z}$. Prouvons que $x\mathcal{R}x$. On a $x + x = 2x$ donc $x + x$ est pair. Donc $x\mathcal{R}x$.

— Symétrie : Soit $x, y \in \mathbb{Z}$. On suppose $x\mathcal{R}y$. On veut prouver que $y\mathcal{R}x$. On a $y + x = x + y$ par conséquent $x + y$ est pair puisque $x\mathcal{R}y$. Donc $y + x$ est pair. Donc $y\mathcal{R}x$.

— Transitivité : Soit $x, y, z \in \mathbb{Z}$. On suppose $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. On veut prouver que $x\mathcal{R}z$. On a par hypothèse

$$\begin{aligned} x + y &= 2m \\ y + z &= 2n \end{aligned}$$

En sommant terme à terme, on a

$$\begin{aligned} (x + y) + (y + z) &= 2m + 2n \\ x + z + 2y &= 2m + 2n \\ x + z &= 2(m + n - y) \end{aligned}$$

Donc $x + z$ est pair. Donc $x\mathcal{R}z$.

Donc $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(b) Soit $x \in \mathbb{Z}$. Déterminer $\text{cl}\,(x)$.

Solution: On distingue 2 cas : x est pair ou x est impair.

- x est pair : Soit $y \in \mathbb{Z}$. On suppose $x\mathcal{R}y$. $x+y$ est pair. Donc y est pair. Réciproquement, si y est pair alors $x+y$ est pair aussi. Dans ce cas, $\mathrm{cl}\,(x)$ est l'ensemble des nombres pairs.
- x est impair : Soit $y \in \mathbb{Z}$. On suppose $x\mathcal{R}y$. $x+y$ est pair. Donc y est impair. Réciproquement, si y est impair alors $x+y$ est pair. Dans ce cas, $\mathrm{cl}\,(x)$ est l'ensemble des nombres impairs.

Exercice 3:

(a) Prouver que la relation sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow ad = cb$$

est une relation d'équivalence.

Solution:

- Réflexivité : Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$. Prouvons que $(x,y)\mathcal{R}(x,y)$. On a $xy = yx$ donc $x\mathcal{R}x$.
- Symétrie : Soit $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$. On suppose $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$. On veut prouver que $(c,d)\mathcal{R}(a,b)$. On a $ad = bc$ donc $cb = da$. Donc $(c,d)\mathcal{R}(a,b)$.
- Transitivité : Soit $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$. On suppose $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ et $(c,d)\mathcal{R}(e,f)$. On veut prouver que $(a,b)\mathcal{R}(e,f)$. On a par hypothèse

$$\begin{aligned} ad = bc &\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \\ cf = de &\Leftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \end{aligned}$$

Par transitivité de $=$. On obtient $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$. Donc $af = be$ donc $(a,b)\mathcal{R}(e,f)$.

Donc $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$. Déterminer $\mathrm{cl}\left((a,b)\right)$.

Solution:

- Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$. On suppose $(a,b)\mathcal{R}(x,y)$. On a donc $ay = xb$. Donc $y = x\frac{b}{a}$. Donc (x,y) est de la forme $\left(x, x\frac{b}{a}\right)$.
- Réciproquement soit $x \in \mathbb{R}^*$. On veut prouver que $\left(x, x\frac{b}{a}\right)\mathcal{R}(a,b)$. En effet, on a $xb = x\frac{b}{a}a$. Donc tout élément de la forme $\left(x, x\frac{b}{a}\right)$ est en

relation avec (a, b).
La classe d'équivalence de (a, b) est donc $\left\{ \left(x, x\frac{b}{a}\right) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}^* \right\}$

Exercice 4:

(a) Prouver que la relation sur $\mathbb{R}$

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow |a| = |b|$$

est une relation d'équivalence.

Solution:
- Réflexivité : Soit $x \in \mathbb{R}$. Prouvons que $x\mathcal{R}x$. On a $|x| = |x|$ donc $x\mathcal{R}x$.
- Symétrie : Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On suppose $x\mathcal{R}y$. On veut prouver que $y\mathcal{R}x$. On a $|x| = |y|$ donc $|y| = |x|$. Donc $y\mathcal{R}x$.
- Transitivité : Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$. On suppose $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. On veut prouver que $x\mathcal{R}z$. On a par hypothèse $|x| = |y|$ et $|y| = |z|$. Donc $|x| = |z|$. Donc $x\mathcal{R}z$.

Donc $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\mathrm{cl}\,(x)$.

Solution:
- Soit $y \in \mathbb{R}$. On suppose $x\mathcal{R}y$. On a donc $|x| = |y|$. Donc $y = x$ ou $y = -x$.
- Réciproquement, on a évidemment, $x\mathcal{R}x$ et $x\mathcal{R} - x$.

La classe d'équivalence de x est donc $\{-x, x\}$. Attention. Quand $x = 0$, la classe d'équivalence est alors $\{0\}$ et dans ce cas uniquement, il n'y a qu'un seul élément.

Exercice 5:

(a) Prouver que la relation sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow a \leqslant c \text{ et } b \leqslant d$$

est une relation d'ordre.

Solution:
- Réflexivité : Soit $(x, y) \in \mathbb{N}$. Prouvons que $(x, y)\mathcal{R}(x, y)$. On a $x \leqslant x$ et $y \leqslant y$. Donc $(x, y)\mathcal{R}(x, y)$.

— Antisymétrie : Soit $(a,b),(c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On suppose $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ et $(c,d)\mathcal{R}(a,b)$. On veut prouver que $(a,b) = (c,d)$. On a $a \leqslant c$, $c \leqslant a$, $b \leqslant d$ et $d \leqslant b$. Donc $a = c$ et $b = d$. Donc $(a,b) = (c,d)$.

— Transitivité : Soit $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On suppose $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ et $(c,d)\mathcal{R}(e,f)$. On veut prouver que $(a,b)\mathcal{R}(e,f)$. On a $a \leqslant c$ et $c \leqslant e$. Donc $a \leqslant e$. Parallèlement, on a $b \leqslant d$ et $d \leqslant f$. Donc $b \leqslant f$.

Donc $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

(b) Prouver que cet ordre est bien fondé.

Solution: Supposons qu'il existe $((a_n,b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeur dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, (a_{n+1},b_{n+1})\mathcal{R}(a_n,b_n)$ et $(a_{n+1},b_{n+1} \neq (a_n,b_n)$ (une suite strictement décroissante).

On a donc $a_{n+1} \leqslant a_n$ et $b_{n+1} \leqslant b_n$. Donc $a_{n+1} + b_{n+1} \leqslant a_n + b_n$. Or $(a_{n+1},b_{n+1} \neq (a_n,b_n)$ donc $a_{n+1} + b_{n+1} < a_n + b_n$. Donc la suite $(a_n,b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement décroissante sur $\mathbb{N}$, ce qui est impossible.

Exercice 6:

(a) Soit E un ensemble fini. Prouver que la relation sur $\mathcal{P}(E)$

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \subseteq y$$

est une relation d'ordre.

Solution:

— Réflexivité : Soit x une partie de E. Prouvons que $x\mathcal{R}x$. Tout ensemble est bien inclus dans lui même donc $x\mathcal{R}x$.

— Antisymétrie : Soit $x, y \in \mathcal{P}(E)$. On suppose $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$. On veut prouver que $x = y$. On a $x \subseteq y$ et $y \subseteq x$. Deux ensembles sont inclus l'un dans l'autre si et seulement s'ils sont égaux. Donc $x = y$.

— Transitivité : Soit $x, y, z \in \mathcal{P}(E)$. On suppose $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. On veut prouver que $x\mathcal{R}z$. On sait que x est un sous ensemble de y et y est un sous ensemble de z. Donc x est un sous ensemble de z.

Donc $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

(b) Prouver que cet ordre est bien fondé.

Solution: Supposons qu'il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante de parties de E. On a donc strictement moins d'éléments dans chaque terme que dans le précédent, donc la suite des cardinaux $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante, ce qui est impossible car c'est une suite d'entier naturels. Donc $\mathcal{R}$ est bien fondé.