TD3 : Fonctions

Exercice 1:

(a) Les fonctions suivantes sont elles injectives, surjectives, bijectives ?

i.
$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto 2n \end{aligned}$$

ii.
$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto -n \end{aligned}$$

iii.
$$\begin{aligned} f_3 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

iv.
$$\begin{aligned} f_4 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

v.
$$\begin{aligned} f_5 : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

(b) Les fonctions suivantes sont elles injectives, surjectives, bijectives ?

i.
$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto n+1 \end{aligned}$$

ii.
$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto n+1 \end{aligned}$$

iii.
$$\begin{aligned} f_3 : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (x+y, x-y) \end{aligned}$$

Exercice 2:

Soit f et g des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto 2n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Déterminer si f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$ sont injectives, surjectives ou bijectives.

Exercice 3:

Démontrer que la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^{+*} \\ x &\mapsto \frac{e^x + 2}{e^{-x}} \end{aligned}$$

est bijective. Calculer sa bijection réciproque. On pourra utiliser le changement de variable $X = e^x$.

Exercice 4:

(a) Soit f

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathfrak{P} \\ n &\mapsto 2n \end{aligned}$$

où $\mathfrak{P}$ est l'ensemble des entiers naturels pairs. Soit g

$$\begin{aligned} g : \mathbb{Z}^{-*} &\to \mathfrak{I} \\ n &\mapsto -2n - 1 \end{aligned}$$

où $\mathfrak{I}$ est l'ensemble des entiers naturels impairs. Prouver que f et g sont des bijections.

(b) On pose h

$$\begin{aligned} h : \mathbb{Z} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto \begin{cases} f(n) & \text{si } n \geqslant 0 \\ g(n) & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Montrer que h est une bijection.

Exercice 5:

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto e^{it} \end{aligned}$$

Trouver des sous ensembles de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ tel que f est une bijection.

Exercice 6:

Soit

$$\begin{aligned} f : [1, +\infty[&\to [0, +\infty[\\ x &\mapsto x^2 - 1 \end{aligned}$$

Déterminer si f est injective, surjective, bijective...

Exercice 7: Des curiosités plus difficiles

(a) Trouver une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$.

(b) Trouver une bijection entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{R}$.