TD3 : Fonctions

Exercice 1:

(a) Les fonctions suivantes sont elles injectives, surjectives, bijectives ?

i.
$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto 2n \end{aligned}$$

Solution:
- Injectivité : Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. On suppose $f_1(x) = f_1(y)$. On a donc $2x = 2y$. Donc $x = y$. Donc f_1 est injective.
- Surjectivité : On constate que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f_1(n)$ est pair. Donc l'équation $f_1(n) = 1$ n'a pas de solution. Donc f_1 n'est pas surjective.
- Bijectivité : Comme f_1 n'est pas surjective, elle n'est pas bijective.

ii.
$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto -n \end{aligned}$$

Solution:
- Injectivité : Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. On suppose $f_2(x) = f_2(y)$. On a donc $-x = -y$. Donc $x = y$. Donc f_2 est injective.
- Surjectivité : Soit $n \in \mathbb{Z}$. On cherche à résoudre $f_2(m) = n$ en m. C'est à dire $-m = n$. Donc $m = -n$. La solution existe. Donc la fonction est surjective.
- Bijectivité : f_2 est surjective et injective, donc bijective. D'autre part, on aurait pu se contenter de remarquer $f_2(m) = n$ n'a qu'une solution en m.

iii.
$$\begin{aligned} f_3 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Solution:
- Injectivité : $f_3(-1) = 1 = f_3(1)$ donc f_3 n'est pas injective.
- Surjectivité : L'équation $f_3(x) = -1$ n'a pas de solution. Donc f_3 n'est pas surjective.
- Bijectivité : f_3 n'est ni injective, ni surjective, donc sûrement pas bijective.

iv.
$$\begin{aligned} f_4 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Solution:
- Injectivité : cf. supra.
- Surjectivité : Tous les éléments de $\mathbb{R}^+$ sont atteint. Plus formellement, soit $y \in \mathbb{R}^+$. On cherche la solution en x de $f_4(x) = y$. Une solution (non unique) est $x = \sqrt{y}$ (qui existe forcément). Donc f_4 est surjective.
- Bijectivité : La fonction n'est pas injective donc pas bijective.

v.

$$\begin{aligned} f_5 : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Solution:
- Injectivité : Même chose que précédemment.
- Surjectivité : Soit $y \in \mathbb{C}$. y peut s'écrire sous sa forme exponentielle : $y = \rho e^{i\theta}$. On pose $x = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}$. On a $f_5(x) = y$. Donc pour tout $y \in \mathbb{C}$, l'équation $f_5(x) = y$ a une solution en x, donc f_5 est surjective.
- Bijectivité : La fonction n'est pas injective donc pas bijective.

(b) Les fonctions suivantes sont elles injectives, surjectives, bijectives ?

i.

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto n+1 \end{aligned}$$

Solution:
- Injectivité : Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^2$. On suppose $f_1(x) = f_1(y)$. On a donc $x + 1 = y + 1$. Donc $x = y$. Donc f_1 est injective.
- Surjectivité : $f_1(x) = 0$ n'a pas de solution, donc f_1 n'est pas surjective.
- Bijectivité : Comme f_1 n'est pas surjective, elle n'est pas bijective.

ii.

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto n+1 \end{aligned}$$

Solution:
- Injectivité : Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. On suppose $f_2(x) = f_2(y)$. On a donc $x + 1 = y + 1$. Donc $x = y$. Donc f_1 est injective.
- Surjectivité : Soit $y \in \mathbb{Z}$. On cherche une solution à $f_2(x) = y$. Une solution est $x = y - 1$. Donc f_2 est surjective
- Bijectivité : Comme f_2 est injective et surjective, f_2 est bijective.

iii.

$$
\begin{aligned}
f_3 : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\
(x,y) &\mapsto (x+y, x-y)
\end{aligned}
$$

Solution:

— Injectivité : Soit $((a,b),(c,d)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. On suppose $f_3((a,b)) = f_3((c,d))$. Autrement dit $(a+b, a-b) = (c+d, c-d)$, donc $a+b = c+d$ et $a-b = c-d$. On résout le système

$$
\left\{
\begin{array}{ccccccc}
a & + & b & = & c & + & d \\
a & - & b & = & c & - & d
\end{array}
\right.
$$

Soit

$$
\left\{
\begin{array}{ccccccc}
a & + & b & = & c & + & d \\
2a & & & = & 2c & &
\end{array}
\right.
$$

Donc

$$
\left\{
\begin{array}{ccccccc}
 & & b & = & & & d \\
a & & & = & c & &
\end{array}
\right.
$$

Donc $(a,b) = (c,d)$, donc f_3 est injective.

— Surjectivité : Soit $(c,d) \in \mathbb{R}^2$. On cherche à résoudre $f_3((a,b)) = (c,d)$ en (a,b).

$$
\left\{
\begin{array}{ccccccc}
a & + & b & = & c & & \\
a & - & b & = & & & d
\end{array}
\right.
$$

Donc

$$
\left\{
\begin{array}{ccccccc}
a & + & b & = & c & & \\
2a & & & = & c & + & d
\end{array}
\right.
$$

par conséquent

$$
\left\{
\begin{array}{ccccccc}
 & & b & = & \frac{1}{2}c & - & \frac{1}{2}d \\
a & & & = & \frac{1}{2}c & + & \frac{1}{2}d
\end{array}
\right.
$$

Donc il existe une solution, donc f_3 est surjective

— Bijectivité : f_3 est injective et surjective, donc bijective.

Exercice 2:

Soit f et g des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\
n &\mapsto 2n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\
n &\mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Déterminer si f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$ sont injectives, surjectives ou bijectives.

Solution:

- f est évidemment injective. f n'atteint jamais 1, donc f n'est pas bijective.
- g n'est pas injective car $g(1) = 0 = g(3)$. g est surjective car tout $y \in \mathbb{N}$ est atteint, en effet $g(2y) = y$. g n'est pas bijective.
- Soit $x \in \mathbb{N}$. $g \circ f(x) = g(2x)$. Or $2x$ est toujours pair, donc $g(2x) = x$. Donc $g \circ f = Id$. Donc $g \circ f$ est bijective.
- On a $f \circ g(0) = 0 = f \circ g(1)$ donc $f \circ g$ n'est pas injective. On a également $f \circ g(x) = 2g(x)$. Donc $f \circ g(x)$ est toujours pair, donc $f \circ g$ n'est pas surjective. Donc $f \circ g$ n'est pas bijective.

Exercice 3:

Démontrer que la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^{+*} \\ x &\mapsto \frac{e^x + 2}{e^{-x}} \end{aligned}$$

est bijective. Calculer sa bijection réciproque. On pourra utiliser le changement de variable $X = e^x$.

Solution: Soit $y \in \mathbb{R}^{+*}$. On veut résoudre $f(x) = y$ en x. On veut donc résoudre $\frac{e^x+2}{e^{-x}} = y$. En utilisant le changement de variable suggéré : $\frac{X+2}{\frac{1}{X}} = y$.

$$\begin{aligned} \frac{X+2}{\frac{1}{X}} = y \quad &\Leftrightarrow \quad X(X+2) = y \\ &\Leftrightarrow \quad X^2 + 2X = y \\ &\Leftrightarrow \quad X^2 + 2X - y = 0 \end{aligned}$$

$\Delta = 4 - 4 \cdot (-y) = 4(1+y)$. Les racines sont donc

$$X = -1 \pm \sqrt{1+y}$$

Mais $X = e^x$. Donc $X > 0$. Donc $e^x = X = -1 + \sqrt{1+y}$. On en déduit $x = \ln\left(-1 + \sqrt{1+y}\right)$. Il existe donc au plus une solution. Il faut encore vérifier que $\ln\left(-1 + \sqrt{1+y}\right)$ est bien défini. On a $y > 0$, donc $\sqrt{1+y} > 1$, donc $-1 + \sqrt{1+y} > 0$, donc la solution est toujours bien définie. Donc la fonction est bijective, de réciproque :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}^{+*} &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto \ln\left(-1 + \sqrt{1+y}\right) \end{aligned}$$

Exercice 4:

(a) Soit f

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathfrak{P} \\ n &\mapsto 2n \end{aligned}$$

où $\mathfrak{P}$ est l'ensemble des entiers naturels pairs. Soit g

$$\begin{aligned} g : \mathbb{Z}^{-*} &\to \mathfrak{I} \\ n &\mapsto -2n-1 \end{aligned}$$

où $\mathfrak{I}$ est l'ensemble des entiers naturels impairs. Prouver que f et g sont des bijections.

Solution:

- Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^2$. On suppose $f(x) = f(y)$ donc $2x = 2y$ donc $x = y$, donc f est injective. D'autre part pour tout nombre pair n, il existe une solution en m à $f(m) = n$: $\frac{n}{2} = m$. Donc f est surjective, donc bijective.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^{-*2}$. On suppose $g(x) = g(y)$ donc $-2x + 3 = -2y + 3$ donc $x = y$, donc g est injective.
  Soit $n = 2k + 1$ un nombre impair. On cherche à résoudre $g(x) = n$ en x. $-2x - 1 = 2k + 1$, $-2x - 2 = 2k$, donc $-x - 1 = k$ donc $x = -k - 1$. Donc g est surjective donc bijective.

(b) On pose h

$$\begin{aligned} h : \mathbb{Z} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto \begin{cases} f(n) & \text{si } n \geqslant 0 \\ g(n) & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Montrer que h est une bijection.

Solution:

- Injectivité : Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. On suppose $h(x) = h(y)$. On distingue 3 cas :
  - x et y sont positifs. On a donc $f(x) = h(x) = h(y) = f(y)$. Donc $x = y$ par injectivité de f.
  - x et y sont strictement négatifs. On a donc $g(x) = h(x) = h(y) = g(y)$. Donc $x = y$ par injectivité de g.
  - x et y sont de signes différents. Donc $h(x)$ est pair et $h(y)$ est impair ou inversement. Donc on ne peux pas voir $h(x) = h(y)$. Ce cas est donc impossible.

  Dans tous ces cas, h est injective.
- Surjectivité : Soit $y \in \mathbb{N}$. On distingue 2 cas :
  - y est pair : il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que $f(x) = y$, par surjectivité de f. Donc $h(x) = y$ a une solution.
  - y est impair : il existe $x \in \mathbb{Z}^{-*}$ tel que $g(x) = y$, par surjectivité de g. Donc $h(x) = y$ a une solution.

  Donc h est surjectif.
- Donc h est bijective.

Exercice 5:

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto e^{it} \end{aligned}$$

Trouver des sous ensembles de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ tel que f est une bijection.

Solution: La fonction g

$$\begin{aligned} g : [0; 2\pi[&\to \mathbb{U} \\ t &\mapsto e^{it} \end{aligned}$$

est bijective où $\mathbb{U}$ est le cercle unité.

g est injective :

$$\begin{aligned} g(x) = g(y) &\Leftrightarrow e^{ix} = e^{iy} \\ &\Leftrightarrow x = y + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow x = y \text{ car } t, t' \in [0, 2\pi[\text{ et donc } k = 0 \end{aligned}$$

g est surjective car tout nombre complexe de $\mathbb{U}$ s'écrit sous la forme polaire $e^{i\theta}$, et l'on peut choisir $\theta \in [0, 2\pi[$.

Exercice 6:

Soit

$$\begin{aligned} f : [1, +\infty[&\to [0, +\infty[\\ x &\mapsto x^2 - 1 \end{aligned}$$

Déterminer si f est injective, surjective, bijective...

Solution:

— Soit $(x, y) \in [1, +\infty[^2$. On suppose $f(x) = f(y)$. Donc $x^2 - 1 = y^2 - 1$ so $x^2 = y^2$ et $x = \pm y$. Mais $x, y > 1$. Donc $x = y$. Donc f est injective.

— Soit $y \in [0, +\infty[$. On cherche à résoudre $f(x) = y$ en x dans $[1, +\infty[$. On a $x^2 - 1 = y$, $x^2 = y + 1$ donc $x = \pm\sqrt{y+1}$. Mais $x > 0$. Donc $x = \sqrt{y+1}$. Donc f est surjective.

— Donc f est injective et surjective donc bijective.

Exercice 7: Des curiosités plus difficiles

(a) Trouver une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$.

Solution:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}^2 &\to \mathbb{N} \\ (m, n) &\mapsto 2^m(2n+1) - 1 \end{aligned}$$

fait l'affaire. En effet, on peut montrer que

$$\begin{aligned} g : \mathbb{N}^2 &\to \mathbb{N}^* \\ (m,n) &\mapsto 2^m(2n+1) \end{aligned}$$

est une bijection.

— Soit $((a,b),(c,d) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$. On suppose $g((a,b)) = g((c,d))$. On a donc $2^a(2b+1) = 2^c(2d+1)$. 2^a et 2^c sont pairs et $2b+1$ et $2d+1$ sont impairs. On a donc $2^a = 2^c$ et $2b+1 = 2d+1$. Donc $(a,b) = (c,d)$. Donc g est injective.
— Soit $y \in \mathbb{N}$. Soit 2^k la plus grande puissance de 2 qui divise y. Il existe donc l tel que $y = 2^k l$ avec l impair. En effet, si l est pair, on pourrait diviser y par 2^{k+1}, ce qui contredit le choix de k. Puisque l est impair, il existe n tel que $l = 2n+1$. Donc $x = (k,n)$ est une solution de $g(x) = y$. On en déduit que g est surjective.
— g est donc bijective.

On en déduit facilement que f est bijective également.

(b) Trouver une bijection entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{R}$.

Solution: Plein d'étapes !

— Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est en bijection avec l'ensemble des fonctions caractéristiques de $\mathbb{N}$
— Montrer que ces fonctions sont en bijection avec les suites infinies à valeur dans $\{0,1\}$.
— Montrer que ces suites sont en bijection avec les décompositions binaires des nombres de $[0,1]$. Pour ce faire, construire tout d'abord une surjection, déterminer les éléments atteints plusieurs fois (exactement 2 en fait). Faire une suite en listant les antécédents de ces valeurs et sauter un indice sur deux.
— Construire une bijection entre $[0,1]$ et $]0,1[$. Construire une bijection entre $]0,1[$ et $\mathbb{R}$.
— Pfiou fini !