

TD3 bis : Fonctions

Exercice 1:

Déterminer la nature des fonctions suivantes : injectives, surjectives, bijectives ?

(a)

$$f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(p, q) \mapsto 2^p 3^q$$

(b)

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x + y, xy)$$

(c)

$$h : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$(p, q) \mapsto p + \frac{1}{q}$$

(d)

$$i : \mathbb{C} \setminus \{-3\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{i\}$$

$$z \mapsto \frac{iz - i}{z + 3}$$

(e)

$$j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto xy$$

(f)

$$k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Exercice 2:

Soit f

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{2x}{1 + x^2}$$

(a) f est-elle injective ?(b) f est-elle surjective ?(c) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1; 1]$.

(d) Soit

$$g : [-1; 1] \rightarrow [-1; 1]$$

$$x \mapsto f(x)$$

(on peut aussi noter $g = f|_{[-1; 1]}$) Montrer que g est bijective de deux façons différentes !

(e) Déterminer sa réciproque.

Exercice 3:

Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto xy \quad \quad \quad x \mapsto (x, x^2)$$

- (a) Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.
- (b) f est-elle injective? surjective?
- (c) g est-elle injective? surjective?
- (d) $f \circ g$ est-elle injective? surjective?
- (e) $g \circ f$ est-elle injective? surjective?

Exercice 4:

Soit f

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x(1 - x)$$

- (a) Soit $y \in \mathbb{R}$. trouver les antécédents de y .
- (b) Restreindre l'ensemble de départ et d'arrivée pour rendre f bijective.

Exercice 5:

- (a) Déterminer une bijection de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$.
- (b) Déterminer une bijection de $\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \rightarrow \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$
- (c) Dédurre une bijection de $[0; 1] \rightarrow [0; 1[$.
- (d) Déterminer une bijection de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Exercice 6:

Soit

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x + \frac{1}{e^x + 1}$$

- (a) Montrer que f est bijective.
- (b) Montrer que $g : x \mapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}$ est une bijection de \mathbb{R}^+ dans un intervalle à préciser. Trouver sa réciproque.