

TD3 bis : Fonctions

Exercice 1:

Déterminer la nature des fonctions suivantes : injectives, surjectives, bijectives ?

(a)

$$f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(p, q) \mapsto 2^p 3^q$$

Solution:

— Injectivité : Soit $((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2$. On suppose $f_1(a, b) = f_1(c, d)$. On a donc $2^a 3^b = 2^c 3^d$. Comme la décomposition en produit de nombres premiers est unique, on a $a = c$ et $b = d$. Donc f est injective

— Surjectivité : On va prouver que 5 n'est jamais atteint. On distingue 4 cas :

1. $p = q = 0 : f(p, q) = 1 \neq 5$.
2. $p = 0$ et $q \neq 0 : f(p, q) = 3^q$, donc multiple de 3. Or 5 n'est pas multiple de 3.
3. $p \neq 0$ et $q = 0 : f(p, q) = 2^p$, donc multiple de 2. Or 5 n'est pas multiple de 2.
4. $p \neq 0$ et $q \neq 0 : f(p, q) = 2^p 3^q$ donc multiple de 3 et de 2. Or 5 n'est pas multiple de 2, ni même de 3.

Donc f n'est pas surjective.

— Bijectivité : Comme f n'est pas surjective, elle n'est pas bijective.

(b)

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x + y, xy)$$

Solution:

— Injectivité : On a $g(1, 2) = (3, 2) = g(2, 1)$. $(2, 1)$ est différent de $(1, 2)$ mais ils ont la même image. g n'est donc pas injective.

— Surjectivité : On se donne $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et on tente de résoudre $g(x, y) = (a, b)$. On a donc

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - y \\ (a - y)y = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a - y \\ y^2 - ay + b = 0 \end{cases}$$

Il n'existe une solution réelle pour y que si $\Delta = a^2 - 4b \geq 0$. Par conséquent, il n'existe pas de solution si $(a, b) = (0, 1)$.
 On peut le trouver plus vite : si on prend $(a, b) = (0, 1)$, il faut que $x = -y$. Alors $xy = -x^2 \leq 0$. Donc $xy \neq 1$. Donc $(0, 1)$ n'est pas atteignable.
 — Bijectivité : g n'est ni injective, ni surjective, donc sûrement pas bijective.

(c)

$$h : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$(p, q) \mapsto p + \frac{1}{q}$$

Solution: Commençons par remarquer quelques petites choses. Si $q = 1$, $h(p, q) = p + 1 \in \mathbb{Z}$. Sinon, la partie entière de $h(p, q)$ (qu'on note $[h(p, q)]$) est p et sa partie fractionnaire est (qu'on note $\{h(p, q)\}$) est $\frac{1}{q}$.

Réciproquement, si $h(p, q)$ est entier, alors $q = 1$.

— Injectivité : Soit $((a, b), (c, d)) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)^2$. On suppose $h(a, b) = h(c, d)$. Si $h(a, b)$ est entier, alors $b = d = 1$, il vient alors que $a = c$. Sinon, on a l'égalité des parties entières et fractionnaires, donc $a = c$ et $b = d$.

— Surjectivité : La partie entière de $\frac{2}{3}$ est 0 et sa partie fractionnaire est $\frac{2}{3}$. Or $\frac{2}{3}$ n'est pas de la forme $\frac{1}{q}$ avec q entier. Donc $\frac{2}{3}$ n'est pas atteignable. h n'est pas surjective.

— Bijectivité : f_3 n'est pas surjective, donc pas bijective.

(d)

$$i : \mathbb{C} \setminus \{-3\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{i\}$$

$$z \mapsto \frac{iz - i}{z + 3}$$

Solution: Soit $y \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Tentons de résoudre $f(z) = y$.

$$f(z) = y \Leftrightarrow \frac{iz - i}{z + 3} = y$$

$$\Leftrightarrow iz - i = y(z + 3)$$

$$\Leftrightarrow iz - i = yz + 3y$$

$$\Leftrightarrow iz - yz = 3y + i$$

$$\Leftrightarrow (i - y)z = 3y + i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{3y + i}{i - y} \quad \text{puisque } y \neq i$$

On trouve bien une unique solution. i est bijective.

(e)

$$j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto xy$$

Solution:

- Injectivité : $j(0, 1) = 0 = j(0, 2)$. Donc j n'est pas injective.
- Surjectivité : Soit $z \in \mathbb{R}$. La paire $(1, z) \in \mathbb{R}^2$ est un antécédent de f par j . j est donc surjective.
- Bijectivité : La fonction n'est pas injective donc pas bijective.

(f)

$$k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$
$$n \mapsto \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Solution:

- Injectivité : $k(0) = 0 = k(1)$. Donc k n'est pas injective.
- Surjectivité : Soit $m \in \mathbb{N}$. On a $k(2m) = \left\lfloor \frac{2m}{2} \right\rfloor = \lfloor m \rfloor = m$. Donc $2m$ est un antécédent de m . Donc k est surjective.
- Bijectivité : Comme k n'est pas injective, elle n'est pas bijective.

Exercice 2:

Soit f

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$$

(a) f est-elle injective?

Solution: Résolvons $f(x) = y$.

$$\frac{2x}{1+x^2} = k \Leftrightarrow 2x = k(1+x^2)$$
$$\Leftrightarrow 2x = k + kx^2$$
$$\Leftrightarrow 0 = kx^2 - 2x + k$$

Si $k \neq 0$: $\Delta = 4 - 4k^2$. Donc si $4 > 4k^2$ (ie. $-1 < k < 1$) il y a deux solutions. f n'est donc pas injective.

(b) f est-elle surjective?

Solution: En reprenant le calcul de la question précédente, on constate qu'il n'y a aucune solution si $|k| > 1$. Donc f n'est pas surjective.

(c) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1; 1]$.

Solution: En reprenant le calcul de la question 1, on constate qu'il y a une solution si et seulement si $k \in [-1; 1]$. Donc l'image de f est $[-1, 1]$.

(d) Soit

$$g : [-1; 1] \rightarrow [-1; 1]$$

$$x \mapsto f(x)$$

(on peut aussi noter $g = f|_{[-1;1]}$) Montrer que g est bijective de deux façons différentes!

Solution: En reprenant la question 1, on montre immédiatement que g est surjective (existence de la solution). Si $k = 1$ (resp. -1), il n'y a qu'une solution : 1 (resp. -1).

Si $-1 < k < 1$ et $k \neq 0$, les solutions sont $\frac{1 \pm \sqrt{1-k^2}}{k}$. Mais $\frac{1 + \sqrt{1-k^2}}{k}$ est en dehors de $[-1; 1]$. Au contraire $\frac{1 - \sqrt{1-k^2}}{k} \in [-1; 1]$ donc c'est l'unique solution. Si $k = 0$, 0 est trivialement la seule solution.

Autre façon. On calcule g' :

$$g'(x) = 2 \frac{1 - 2x^2}{(1 + x^2)^2}$$

g' est donc positive sur $[-1; 1]$ et strictement positive sur $] - 1; 1[$. g est donc strictement croissante sur cet intervalle. Donc g est bijective.

(e) Déterminer sa réciproque.

Solution: Presque déjà fait :

$$g^{-1} : [-1; 1] \rightarrow [-1; 1]$$

$$0 \mapsto 0$$

$$x \mapsto \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}$$

Exercice 3:

Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto xy \quad \text{et} \quad x \mapsto (x, x^2)$$

(a) Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Solution:

— Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(x, x^2) \\ &= x^3 \end{aligned}$$

— Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} g \circ f(x, y) &= g(xy) \\ &= (xy, x^2y^2) \end{aligned}$$

(b) f est-elle injective? surjective?

Solution: f n'est rien du tout, cf. ex. 1 q. e).

(c) g est-elle injective? surjective?

Solution: g est évidemment injective : si $g(a) = g(b)$, alors $(a, a^2) = (b, b^2)$ d'où $a = b$.
 g n'est cependant pas injective : $(0, -1)$ n'a pas d'antécédent car $-1 < 0$, mais $x^2 \geq 0$.

(d) $f \circ g$ est-elle injective? surjective?

Solution: $f \circ g$ est la fonction $x \mapsto x^3$, elle est clairement bijective.

(e) $g \circ f$ est-elle injective? surjective?

Solution: $g \circ f$ n'est pas injective car f le serait, et n'est pas surjective, car g le serait.

Exercice 4:

Soit f

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x(1-x) \end{aligned}$$

(a) Soit $y \in \mathbb{R}$. trouver les antécédents de y .

Solution: On cherche les solutions en x de $f(x) = y$.

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow x(1-x) = y \\ &\Leftrightarrow x - x^2 = y \\ &\Leftrightarrow -x^2 + x - y = 0 \end{aligned}$$

$\Delta = 1 - 4(-1)(-y) = 1 - 4y$. Il y a une unique solution pour $y = \frac{1}{4}$. Il y a deux solutions pour $y < \frac{1}{4}$ et aucune si $y > \frac{1}{4}$.

— Si $y = \frac{1}{4}$, l'unique solution est $\frac{1}{2}$.

— Si $y < \frac{1}{4}$, les solutions sont $\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - y}$

(b) Restreindre l'ensemble de départ et d'arriver pour rendre f bijective.

Solution: Les valeurs strictement supérieures à $\frac{1}{4}$ ne sont pas atteignables par f , donc on prend l'ensemble d'arrivée $]-\infty; \frac{1}{4}[$

Pour les valeurs strictement inférieures à $\frac{1}{4}$, il y deux solution : une strictement inférieure à $\frac{1}{2}$ et l'autre strictement supérieure. Il faut donc n'en prendre qu'une. On peut ainsi choisir $[\frac{1}{2}; +\infty[$. NB : $]-\infty; \frac{1}{2}]$ est également correct.

Exercice 5:

(a) Déterminer une bijection de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$.

Solution: la fonction

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^* \tag{1}$$

$$n \mapsto n + 1 \tag{2}$$

convient. Elle est clairement bijective., de bijection réciproque $n \in \mathbb{N}^* \mapsto n - 1$.

(b) Déterminer une bijection de $\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \rightarrow \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$

Solution: la fonction

$$\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \rightarrow \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\} \tag{3}$$

$$\frac{1}{n} \mapsto \frac{1}{n+1} \tag{4}$$

convient. Elle est clairement bijective., de bijection réciproque $\frac{1}{n} \mapsto \frac{1}{n-1}$.

(c) Déduire une bijection de $[0; 1] \rightarrow [0; 1[$.

Solution: On construit la fonction f qui associe x à x si x n'est pas de la forme $\frac{1}{n}$ et à $\frac{1}{n+1}$ Sinon.

(d) Déterminer une bijection de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Solution: On peut prendre la fonction

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$
$$n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

La suite correspondante est $0, -1, 1, -2, 2, \dots$

Exercice 6:

Soit

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x + \frac{1}{e^x + 1}$$

(a) Montrer que f est bijective.

Solution: On dérive f :

$$f'(x) = 1 - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

On remarque que $e^x + 1 > e^x$ et comme $e^x + 1 > 1$, on a $(e^x + 1)^2 > e^x + 1 > e^x$. Donc f' est toujours strictement positive. Donc f est strictement croissante, donc f est injective.

De plus, elle est définie sur \mathbb{R} et $\lim_{x \rightarrow -\infty} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} = \infty$, donc f est surjective, donc bijective.

(b) Montrer que $g : x \mapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}$ est une bijection de \mathbb{R}^+ dans un intervalle à préciser. Trouver sa réciproque.

Solution: Soit $y \in \mathbb{R}$. On résout $f(x) = y$ sur \mathbb{R}^+ .

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = y \Leftrightarrow 1-x^2 = y(1+x^2)$$
$$\Leftrightarrow 1-x^2 = y + yx^2$$
$$\Leftrightarrow 0 = x^2(y+1) + y - 1$$
$$\Leftrightarrow x^2(y+1) = 1-y$$
$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1-y}{y+1} \quad \text{avec } y \neq -1$$

$\frac{1-y}{y+1}$ est positif sur $] -1; 1]$. Donc $x = \pm \sqrt{\frac{1-y}{y+1}}$, or on résout dans \mathbb{R}^+ . Donc $x = \sqrt{\frac{1-y}{y+1}}$.

Ainsi, g est une bijection entre \mathbb{R}^+ et $] - 1; 1]$ de bijection réciproque $y \in] - 1; 1] \mapsto \sqrt{\frac{1-y}{y+1}}$.