Calcul Propositionnel

Marc Chevalier

DI ENS

10 septembre 2018

Présentation

`marc.chevalier@ens.fr`

Syntaxe

- La forme des formules : constituants, règles de grammaire...
- Tout ce qu'on peut faire sur la formule sans lui donner un sens.
- Pas d'évaluation : cf. sémantique.

Syntaxe

Définition 1 – Alphabet

Un symbole (ou lettre) est l'une de ces quatre entités :

- une variable propositionnelle (ou proposition atomique, ou atome) : A, B, C, A_0, …, A_n ;
- une constante : $\top$, $\bot$;
- un connecteur logique : $\vee$, $\wedge$, $\neg$;
- une paire de séparateurs : (,).

Syntaxe

Tous les mots ne sont pas raisonnables :

Exemple 1

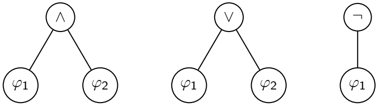
$)((A \vee (\perp$ est un mot sur le bon alphabet.

Syntaxe

Définition 2 – Formules

L'ensemble des formule est définie par induction par :

- les variables et constantes propositionnelles sont des formules ;
- si φ_1 et φ_2 sont des formules :
  - $\varphi_1 \land \varphi_2$ est une formule ;
  - $\varphi_1 \lor \varphi_2$ est une formule ;
  - $\neg\varphi_1$ est une formule ;
  - (φ_1) est une formule.



Syntaxe

Définition 3 – Priorité des opérateurs

Les opérateurs par ordre de priorité décroissante :

- $\neg$;
- $\wedge$;
- $\vee$.

Syntaxe

Toutes les formules sont raisonnables :

- $\top$
- A
- $(A \wedge (\neg A))$
- $((A \vee B) \wedge (\neg A))$
- $\left(\left(\neg((\neg A) \wedge \bot)\right) \wedge A\right)$

sont des formules.

- $()A\vee$
- $A\neg B$

ne sont pas des formules.

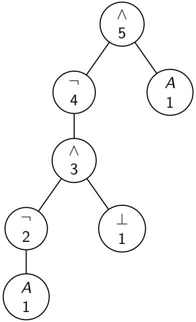
Syntaxe

Définition 4 – Taille d'une formule

$$|\varphi| = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi = A \text{ ou } \varphi = \bot \text{ ou } \varphi = \top \\ 1 + |\varphi_1| & \text{si } \varphi = \neg\varphi_1 \\ 1 + \max\left(|\varphi_1|, |\varphi_2|\right) & \text{si } \varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2 \text{ ou } \varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \\ |\varphi_1| & \text{si } \varphi = (\varphi_1) \end{cases}$$

Syntaxe

- $\top$ est de taille 1
- A est de taille 1
- $(A \wedge (\neg A))$ est de taille 3
- $((A \vee B) \wedge (\neg A))$ est de taille 3
- $\Big(\big(\neg((\neg A) \wedge \bot)\big) \wedge A\Big)$ est de taille 5



Syntaxe

Définition 5

$$\mathrm{Var}\left(\varphi\right) = \begin{cases} \{A\} & \text{si } \varphi = A \\ \emptyset & \text{si } \varphi = \bot \text{ ou } \varphi = \top \\ \mathrm{Var}\left(\varphi_1\right) & \text{si } \varphi = \neg\varphi_1 \text{ ou } \varphi = \left(\varphi_1\right) \\ \mathrm{Var}\left(\varphi_1\right) \cup \mathrm{Var}\left(\varphi_2\right) & \text{si } \varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \text{ ou } \varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2 \end{cases}$$

Ce sont exactement les variables qui apparaissent dans φ

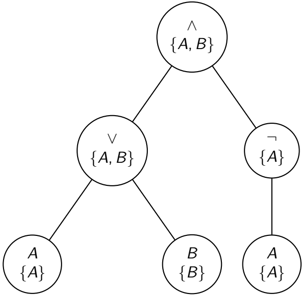
Syntaxe

Proposition 1

Soit φ une formule. Les variables propositionnelles qui apparaissent dans φ sont exactement $\mathrm{Var}(\varphi)$.

Syntaxe

- $\mathrm{Var}\,(A) = \{A\}$.
- $\mathrm{Var}\left((A \wedge (\neg A))\right) = \{A\}$.
- $\mathrm{Var}\left(\left(\left(\neg((\neg A) \wedge \bot)\right) \wedge A\right)\right) = \{A\}$.
- $\mathrm{Var}\left(((A \vee B) \wedge (\neg A))\right) = \{A, B\}$.



Sémantique

- Sémantique $=$ sens (interprétation, évaluation...)
- Valeur de vérité : $\mathcal{B} = \{tt, ff\}$

George Boole (1815 – 1864)

Sémantique

Définition 6 – Environnement

Soit V un ensemble de variables propositionnelles. Un environnement sur V est une fonction de $V \to \mathcal{B}$.

Sémantique

Définition 7 – Évaluation

Soient φ une formule et V un sur-ensemble fini de $\mathrm{Var}(\varphi)$. Soit σ un environnement sur V. Nous définissons l'évaluation $[\varphi]_\sigma$ de φ sur l'environnement σ par induction de la manière suivante :

- $[\bot]_\sigma = \mathit{ff}$, $[\top]_\sigma = \mathit{tt}$;
- $[A_i]_\sigma = \sigma(A_i)$;
- $[(\varphi)]_\sigma = [\varphi]_\sigma$;
- $[\neg\varphi]_\sigma = \begin{cases} \mathit{tt} & \text{si } [\varphi]_\sigma = \mathit{ff}, \\ \mathit{ff} & \text{sinon} ; \end{cases}$
- $[\varphi_1 \vee \varphi_2]_\sigma = \begin{cases} \mathit{tt} & \text{si } [\varphi_1]_\sigma = \mathit{tt} \text{ ou } [\varphi_2]_\sigma = \mathit{tt}, \\ \mathit{ff} & \text{sinon} ; \end{cases}$
- $[\varphi_1 \wedge \varphi_2]_\sigma = \begin{cases} \mathit{tt} & \text{si } [\varphi_1]_\sigma = \mathit{tt} \text{ et } [\varphi_2]_\sigma = \mathit{tt}, \\ \mathit{ff} & \text{sinon.} \end{cases}$

Sémantique

Remarque 1

En mathématique :

- vrai OU faux = vrai
- vrai OU vrai = vrai

On parle de « ou inclusif ».

Sémantique

Soit σ, l'environnement sur $\{A, B\}$

$$A \mapsto tt$$
$$B \mapsto ff$$

- $[\top]_\sigma = tt$
- $[A]_\sigma = tt$
- $\left[(\neg A)\right]_\sigma = ff$
- $\left[(A \vee B)\right]_\sigma = tt$
- $\left[\left(A \wedge (\neg B)\right)\right]_\sigma = tt$

Sémantique

Définition 8 – Table de vérité

Soient φ une formule et V un sur-ensemble de $\mathrm{Var}(\varphi)$ non vide. Table de vérité $[\![\varphi]\!]_V := \left(\sigma \mapsto [\varphi]_\sigma\right)$

Sémantique

Nous donnons la table de vérité de la formule $\left(A \vee (\neg B)\right)$ sur l'ensemble de variables $\{A; B; C\}$.

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	$[C]_\sigma$	$[(\neg B)]_\sigma$	$\left[\left(A \vee (\neg B)\right)\right]_\sigma$
ff	ff	ff	tt	tt
ff	ff	tt	tt	tt
ff	tt	ff	ff	ff
ff	tt	tt	ff	ff
tt	ff	ff	tt	tt
tt	ff	tt	tt	tt
tt	tt	ff	ff	tt
tt	tt	tt	ff	tt

Sémantique

Nous donnons la table de vérité de la formule $\left(A \vee ((\neg B) \wedge C)\right)$ sur l'ensemble de variables $\{A; B; C\}$.

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	$[C]_\sigma$	$[(\neg B)]_\sigma$	$\left[((\neg B) \wedge C)\right]_\sigma$	$\left[\left(A \vee ((\neg B) \wedge C)\right)\right]_\sigma$
ff	ff	ff	tt	ff	ff
ff	ff	tt	tt	tt	tt
ff	tt	ff	ff	ff	ff
ff	tt	tt	ff	ff	ff
tt	ff	ff	tt	ff	tt
tt	ff	tt	tt	tt	tt
tt	tt	ff	ff	ff	tt
tt	tt	tt	ff	ff	tt

Sémantique

Définition 9 – Équivalence sémantique

$$[\![\varphi_1]\!]_{\mathsf{Var}(\varphi_1)\cup\mathsf{Var}(\varphi_2)} = [\![\varphi_2]\!]_{\mathsf{Var}(\varphi_1)\cup\mathsf{Var}(\varphi_2)}$$

On note $\varphi_1 \equiv \varphi_2$

Exemple 2

$$\Big((A \land (\neg A)) \lor B\Big) \equiv B$$

Sémantique

Définition 10 – Tautologie

φ est une tautologie si et seulement si $\varphi \equiv \top$.

Exemple 3

La formule $\big(A \vee (\neg A)\big)$ est une tautologie.

Sémantique

Définition 11 – Contradiction

φ est une contradiction si et seulement si $\varphi \equiv \bot$.

Exemple 4

La formule $\left(A \wedge (\neg A)\right)$ est une contradiction.

Autres connecteurs

Définition 12 – Implication

On introduit le connecteur $\Rightarrow$: $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ est une formule propositionnelle.
On lui donne la sémantique :

$$\left[(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)\right]_\sigma = \begin{cases} \mathit{tt} & \text{si } \left[\varphi_1\right]_\sigma = \mathit{ff} \text{ ou } \left[\varphi_2\right]_\sigma = \mathit{tt} \\ \mathit{ff} & \text{sinon ;} \end{cases}$$

Proposition 2

$$(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \equiv \left((\neg\varphi_1) \vee \varphi_2\right)$$

Proposition 3 – Ex falso (quodlibet)

$(\perp \Rightarrow \varphi_1)$ est une tautologie

Définition 13 – Équivalence

On introduit le connecteur $\Leftrightarrow$: $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ est une formule propositionnelle. On lui donne la sémantique :

$$\left[(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)\right]_\sigma = \begin{cases} tt & \text{si } [\varphi_1]_\sigma = [\varphi_2]_\sigma \\ ff & \text{sinon ;} \end{cases}$$

Proposition 4

$$(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2) \equiv ((\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \varphi_1))$$

Règles de calcul

Proposition 5 – De Morgan

Auguste de Morgan
(1806 – 1871)

$$(\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)) \equiv ((\neg\varphi_1) \wedge (\neg\varphi_2))$$
$$(\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)) \equiv ((\neg\varphi_1) \vee (\neg\varphi_2))$$

Règles de calcul

Proposition 6 – Tiers exclu

$$(\neg(\neg\varphi_1)) \equiv \varphi_1$$

Règles de calcul

Proposition 7

La relation $\equiv$ est une relation d'équivalence, c'est à dire :

- $\varphi_1 \equiv \varphi_1$ (réflexivité) ;
- si $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ et $\varphi_2 \equiv \varphi_3$ alors $\varphi_1 \equiv \varphi_3$ (transitivité) ;
- si $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ alors $\varphi_2 \equiv \varphi_1$ (symétrie).

Règles de calcul

Corollaire 1

$$(\neg(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)) \equiv (\varphi_1 \wedge (\neg\varphi_2))$$

Démonstration.

Tables ou

$$\begin{aligned}
(\neg(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)) &\equiv \left(\neg((\neg\varphi_1) \vee \varphi_2)\right) \\
&\equiv \left((\neg(\neg\varphi_1)) \wedge (\neg\varphi_2)\right) \\
&\equiv (\varphi_1 \wedge (\neg\varphi_2))
\end{aligned}$$

La conclusion s'obtient par transitivité de $\equiv$ $\square$