Raisonnement

Marc CHEVALIER
DI ENS

Septembre 2018

Résumé

Le calcul propositionnel étant vu, on peut donc définir les modèles de raisonnement valides et les justifier.

φ, φ_1 et φ_2 désignent des formules dans la suite.

1 Déduction

Cette première proposition décrit le modèle le plus simple et le plus naturel de raisonnement. Il s'agit du modus ponens (du latin « modus ponendo ponens » : « mode qui affirme en affirmant »). Les origines du modus ponens se trouvent les premiers logiciens grecs.

Proposition 1 – Modus ponens

Si φ_1 et $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ sont des tautologies, alors φ_2 est une tautologie.

Démonstration. Nous vérifions que, pour tout environnement σ que, quelle que soit l'évaluation des formules φ_1 et φ_2 sur l'environnement σ, lorsque l'évaluation des formules φ_1 et $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ donnent la valeur tt, alors l'évaluation de la formule φ_2 donne toujours la valeur tt.

$[\varphi_1]_\sigma$	$[\varphi_2]_\sigma$	$[(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)]_\sigma$
ff	ff	tt
ff	tt	tt
tt	ff	ff
tt	$\boxed{tt}$	tt

$\square$

Nous pouvons appliquer le principe de déduction aux équivalences :

Proposition 2

Soient φ_1 et φ_2 deux formules du calcul propositionnel. Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ et φ_1 sont des tautologies ;
2. $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ et φ_2 sont des tautologies.

Démonstration. Nous prouvons les deux implications de l'équivalence.

1. Nous vérifions que, pour tout environnement σ que, quelle que soit l'évaluation des formules φ_1 et φ_2 sur l'environnement σ, lorsque l'évaluation des formules φ_1 et $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ donnent la valeur tt, alors l'évaluation de la formule φ_2 donne toujours la valeur tt.

$[\varphi_1]_\sigma$	$[\varphi_2]_\sigma$	$[(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)]_\sigma$
ff	ff	tt
ff	tt	ff
tt	ff	ff
tt	$\boxed{tt}$	tt

2. Réciproquement, nous vérifions que, pour tout environnement σ que, quelle que soit l'évaluation des formules φ_1 et φ_2 sur l'environnement σ, lorsque l'évaluation des formules φ_2 et $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ donnent la valeur tt, alors l'évaluation de la formule φ_1 donne toujours la valeur tt.

$[\varphi_1]_\sigma$	$[\varphi_2]_\sigma$	$[(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)]_\sigma$
ff	ff	tt
ff	tt	ff
tt	ff	ff
$\boxed{tt}$	tt	tt

$\square$

2 Prouver que $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$

Le but de cette sous-section est de donner un schéma de preuves pour démontrer qu'une formule de calcul propositionnel de la forme $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$ est une tautologie.

Nous nous donnons la tautologie suivante pour formaliser les raisonnements sur les disjonctions.

Théorème 1

Les formules

$$((\varphi \Rightarrow \varphi_1) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2)))$$

et

$$((\varphi \Rightarrow \varphi_2) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2)))$$

sont des tautologies.

Démonstration. Nous vérifions que pour tout environnement σ que, quelle que soit l'évaluation des formules φ_1, φ_1 et φ_2 sur l'environnement σ, l'évaluation des formules $((\varphi \Rightarrow \varphi_1) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2)))$ et $((\varphi \Rightarrow \varphi_2) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2)))$ donne toujours la valeur *tt*.

$[\varphi]_\sigma$	$[\varphi_1]_\sigma$	$[\varphi_2]_\sigma$	$[(\varphi \Rightarrow \varphi_1)]_\sigma$	$[(\varphi \Rightarrow \varphi_2)]_\sigma$
ff	*ff*	*ff*	*tt*	*tt*
ff	*ff*	*tt*	*tt*	*tt*
ff	*tt*	*ff*	*tt*	*tt*
ff	*tt*	*tt*	*tt*	*tt*
tt	*ff*	*ff*	*ff*	*ff*
tt	*ff*	*tt*	*ff*	*tt*
tt	*tt*	*ff*	*tt*	*ff*
tt	*tt*	*tt*	*tt*	*tt*

$[\varphi]_\sigma$	$[\varphi_1]_\sigma$	$[\varphi_2]_\sigma$	$[(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))]_\sigma$	$[((\varphi \Rightarrow \varphi_1) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2)))]_\sigma$
ff	*ff*	*ff*	*tt*	*tt*
ff	*ff*	*tt*	*tt*	*tt*
ff	*tt*	*ff*	*tt*	*tt*
ff	*tt*	*tt*	*tt*	*tt*
tt	*ff*	*ff*	*ff*	*tt*
tt	*ff*	*tt*	*tt*	*tt*
tt	*tt*	*ff*	*tt*	*tt*
tt	*tt*	*tt*	*tt*	*tt*

$[\varphi]_\sigma$	$[\varphi_1]_\sigma$	$[\varphi_2]_\sigma$	$[(\varphi \Rightarrow \varphi_2)]_\sigma$	$[(\varphi_1 \vee \varphi_2)]_\sigma$	$[(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))]_\sigma$
ff	ff	ff	tt	ff	tt
ff	ff	tt	tt	tt	tt
ff	tt	ff	tt	tt	tt
ff	tt	tt	tt	tt	tt
tt	ff	ff	ff	ff	ff
tt	ff	tt	tt	tt	tt
tt	tt	ff	ff	tt	tt
tt	tt	tt	tt	tt	tt

$[\varphi]_\sigma$	$[\varphi_1]_\sigma$	$[\varphi_2]_\sigma$	$[(((\varphi \Rightarrow \varphi_2) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2)))]_\sigma$
ff	ff	ff	tt
ff	ff	tt	tt
ff	tt	ff	tt
ff	tt	tt	tt
tt	ff	ff	tt
tt	ff	tt	tt
tt	tt	ff	tt
tt	tt	tt	tt

□

Nous en déduisons le schéma de déduction suivant. Pour prouver que la formule $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$ est une tautologie, il suffit de prouver que la formule $(\varphi \Rightarrow \varphi_1)$ ou/et que la formule $(\varphi \Rightarrow \varphi_2)$ est une tautologie.

Démonstration. Supposons que nous sachions prouver que la formule $(\varphi \Rightarrow \varphi_1)$ est une tautologie. Nous pouvons utiliser le théorème précédent et le lemme modus ponens pour déduire que la formule $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$ est une tautologie. Le même schéma de preuve fonctionne au cas où nous saurions prouver que la formule $(\varphi \Rightarrow \varphi_1)$ est une tautologie. □

3 Prouver que $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$

Le but de cette sous-section est de donner un schéma de preuves pour démontrer qu'une formule de calcul propositionnel de la forme $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$ est une tautologie. Nous commençons par donner un lemme de déduction pour les conjonctions de formules.

Lemme 1

Les formules φ_1 et φ_2 sont des tautologies, si et seulement si la formule $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ est une tautologie.

Puis nous formalisons les preuves de conjonctions par la tautologie suivante.

Théorème 2 – Prouver une conjonction

La formule $((\varphi \Rightarrow \varphi_1) \wedge (\varphi \Rightarrow \varphi_2)) \iff (\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$ est une tautologie.

Démonstration. Nous vérifions que pour tout environnement σ que, quelle que soit l'évaluation des formules φ_1, φ_1 et φ_2 sur l'environnement σ, les évaluations des formules $((\varphi \Rightarrow \varphi_1) \wedge (\varphi \Rightarrow \varphi_2))$ et $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$ donnent la même valeur.

$[\varphi]_\sigma$	$[\varphi_1]_\sigma$	$[\varphi_2]_\sigma$	$[(\varphi \Rightarrow \varphi_1)]_\sigma$	$[(\varphi \Rightarrow \varphi_2)]_\sigma$	$[((\varphi \Rightarrow \varphi_1) \wedge (\varphi \Rightarrow \varphi_2))]_\sigma$
ff	ff	ff	tt	tt	tt
ff	ff	tt	tt	tt	tt
ff	tt	ff	tt	tt	tt
ff	tt	tt	tt	tt	tt
tt	ff	ff	ff	ff	ff
tt	ff	tt	ff	tt	ff
tt	tt	ff	tt	ff	ff
tt	tt	tt	tt	tt	tt

$[\varphi]_\sigma$	$[\varphi_1]_\sigma$	$[\varphi_2]_\sigma$	$[(\varphi_1 \wedge \varphi_2)]_\sigma$	$[(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))]_\sigma$
ff	ff	ff	ff	tt
ff	ff	tt	ff	tt
ff	tt	ff	ff	tt
ff	tt	tt	tt	tt
tt	ff	ff	ff	ff
tt	ff	tt	ff	ff
tt	tt	ff	ff	ff
tt	tt	tt	tt	tt

□

Nous en déduisons le schéma de déduction suivant. Pour prouver que la formule $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$ est une tautologie, il suffit de prouver que $(\varphi \Rightarrow \varphi_1)$ et $(\varphi \Rightarrow \varphi_2)$ sont des tautologies.

Démonstration. En effet, supposons que $(\varphi \Rightarrow \varphi_1)$ et $(\varphi \Rightarrow \varphi_2)$ soient des tautologies. Par le lemme 1, nous savons que $((\varphi \Rightarrow \varphi_1) \wedge (\varphi \Rightarrow \varphi_2))$ est une tautologie. Puis par le théorème 2, nous déduisons que $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$ est une tautologie. □

4 Le raisonnement par contraposition

Le raisonnement par contraposition permet de prouver une implication en prouvant que la négation de son but implique la négation de sa prémisse. Ce raisonnement est formalisé par par la tautologie suivante :

Théorème 3 – Contraposée

La formule $((\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \Leftrightarrow ((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1)))$ est une tautologie

Démonstration. Nous vérifions que, pour tout environnement σ que, quelle que soit l'évaluation des formules φ_1, φ_1 et φ_2 sur l'environnement σ, l'évaluation de la formule $((\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \iff ((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1)))$ donne toujours la valeur *tt*.

$$\varphi_3 := ((\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \iff ((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1)))$$

$[\varphi_1]_\sigma$	$[\varphi_2]_\sigma$	$[(\varphi \Rightarrow \varphi_1)]_\sigma$	$[(\neg\varphi_2)]_\sigma$	$[(\neg\varphi_1)]_\sigma$	$[((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1))]_\sigma$	$[\varphi_3]_\sigma$
ff	*ff*	*tt*	*tt*	*tt*	*tt*	*tt*
ff	*tt*	*tt*	*ff*	*tt*	*tt*	*tt*
tt	*ff*	*ff*	*tt*	*ff*	*ff*	*tt*
tt	*tt*	*tt*	*ff*	*ff*	*tt*	*tt*

□

Nous déduisons que la formule $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ est une tautologie si et seulement si $((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1))$ est une tautologie.

Démonstration. Par le théorème de démonstration par contraposée, la formule :

$$((\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \iff ((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1)))$$

est une tautologie.

Montrons maintenant les deux directions dans l'équivalence qui nous intéresse :

1. Supposons que $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ soit une tautologie.
   Les deux formules $((\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \iff ((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1)))$ et $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ sont des tautologies, donc les deux formules $((\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \iff ((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1)))$ et $((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1))$ sont des tautologies. Donc la formule $((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1))$ est une tautologie.
2. Supposons que $((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1))$ est une tautologie.
   Les deux formules $((\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \iff ((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1)))$ et $((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1))$ sont des tautologies, les deux formules $((\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \iff ((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1)))$ et $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ sont des tautologies. Donc la formule $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ est une tautologie.

Ainsi la formule $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ est une tautologie si et seulement si $((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1))$ est une tautologie. □

Exemple 1

Nous pouvons montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, si x est plus petit que tous les réels strictement positifs, alors x est inférieur ou égal à 0.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel.
Raisonnons par contraposition, en supposant que x n'est pas inférieur ou égal à 0.
Ainsi, x est strictement supérieur à 0.
Nous avons $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$ et $\frac{x}{2} > 0$ donc :

$$0 < \frac{x}{2} < x.$$

Donc il existe un nombre réel strictement positif et plus petit que x.

Ainsi, si x est plus petit que tous les réel strictement positifs, alors x est inférieur ou égal à 0. □

On peut évidemment appliquer le modus ponens à une contraposée ; c'est le principe du modus tollendo tollens, abrégé modus tollens (du latin signifiant « procédé qui nie en niant ».)

Corollaire 1 – Modus tollens

Si $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ et $(\neg\varphi_2)$ sont des tautologies, alors $(\neg\varphi_1)$ est une tautologie.

Démonstration. Il s'agit simplement d'appliquer le modus ponens à la contraposée de l'implication. □

5 Le raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde consiste à prouver qu'un formule φ est une contradiction en montrant que supposer que ce soit une tautologie implique que $\perp$ est une tautologie.

Le raisonnement par l'absurde est formalisé par la tautologie suivante :

Théorème 4 – Raisonnement par l'absurde

La formule $(((\neg\varphi) \Rightarrow \perp) \Rightarrow \varphi)$ est une tautologie.

Démonstration. Nous vérifions que, pour tout environnement σ que, quelle que soit l'évaluation des formules φ_1, φ_1 et φ_2 sur l'environnement σ, l'évaluation de la formule $(((\neg\varphi) \Rightarrow \perp) \Rightarrow \varphi)$ donne toujours la valeur tt.

$[\varphi]_\sigma$	$[(\neg\varphi)]_\sigma$	$[\perp]_\sigma$	$[((\neg\varphi) \Rightarrow \perp)]_\sigma$	$[(((\neg\varphi) \Rightarrow \perp) \Rightarrow \varphi)]_\sigma$
ff	tt	ff	ff	tt
tt	ff	ff	tt	tt

□

Nous obtenons la méthode de raisonnement suivante : pour prouver une proposition φ, nous pouvons supposer que φ est fausse et essayer d'aboutir à une contradiction. En cas de succès, nous pouvons déduire que la proposition φ est vraie.

Démonstration. Supposons que $((\neg\varphi) \implies \perp)$ soit une tautologie. Par le théorème de démonstration par l'absurde, nous savons par ailleurs que la formule $(((\neg\varphi) \Rightarrow \perp) \Rightarrow \varphi)$ est une tautologie. Donc par le modus ponens, la formule φ est une tautologie. □

Exemple 2

Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Démonstration. Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel.

Soient p, q deux entiers tels que :

1. $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$
2. $\frac{p}{q}$ soit irréductible.

Nous aurions donc :

$$p = \sqrt{2} \cdot q.$$

Puis, en prenant les carrés à droite et à gauche :

$$p^2 = 2 \cdot q^2.$$

Ainsi 2 est un diviseur de p^2. Comme 2 est un nombre premier, c'est un diviseur de p.
Soit donc un entier k tel que $p = 2 \cdot k$. Nous avons donc :

$$4 \cdot k^2 = 2 \cdot q^2.$$

Puis :

$$2 \cdot k^2 = q^2.$$

Donc 2 est un diviseur de q^2. Comme 2 est un nombre premier, c'est un diviseur de q.
Ainsi 2 est un diviseur commun de p et q, ce qui est absurde puisque $\frac{p}{q}$ est irréductible. On a donc une contradiction.
Ainsi $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. □

6 Preuve par cas

La preuve par cas consiste à séparer une preuve en plusieurs sous cas qui couvrent tous les cas possibles, et à montrer le but dans tous les sous cas. Cette technique de preuve est formalisée par la tautologie suivante.

Théorème 5

La formule $((((\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \Rightarrow \varphi)) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow \varphi)$ est une tautologie.

Démonstration. Nous vérifions que, pour tout environnement σ que, quelle que soit l'évaluation des formules φ_1, φ_1 et φ_2 sur l'environnement σ, l'évaluation de la formule $((((\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \Rightarrow \varphi)) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow \varphi)$ donne toujours la valeur tt.

$$\varphi_3 := (((\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \Rightarrow \varphi)) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \varphi))$$

$[\varphi]_\sigma$	$[\varphi_1]_\sigma$	$[\varphi_2]_\sigma$	$[(\varphi_1 \vee \varphi_2)]_\sigma$	$[(\varphi_1 \Rightarrow \varphi)]_\sigma$	$[(\varphi_2 \Rightarrow \varphi)]_\sigma$	$[\varphi_3]_\sigma$
ff	ff	ff	ff	tt	tt	ff
ff	ff	tt	tt	tt	ff	ff
ff	tt	ff	tt	ff	tt	ff
ff	tt	tt	tt	ff	ff	ff
tt	ff	ff	ff	tt	tt	ff
tt	ff	tt	tt	tt	tt	tt
tt	tt	ff	tt	tt	tt	tt
tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt

$$\varphi_4 := (((\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \Rightarrow \varphi)) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \varphi))$$
$$\varphi_5 := ((((\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \Rightarrow \varphi)) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow \varphi)$$

□

$[\varphi]_\sigma$	$[\varphi_4]_\sigma$	$[\varphi_5]_\sigma$
ff	ff	tt
ff	ff	tt
ff	ff	tt
ff	ff	tt
tt	ff	tt
tt	tt	tt
tt	tt	tt
tt	tt	tt

Nous en déduisons le principe de preuve suivant. Pour prouver une formule φ du calcul propositionnel, il suffit de trouver deux formules φ_1 et φ_2 telles que $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi)$, et $(\varphi_2 \Rightarrow \varphi)$ soient des tautologies.

Exemple 3

Démontrer que pour tout entier naturel n, l'entier $n \cdot (n+1)$ est divisible par 2.

Démonstration. Soit n un entier.
Nous savons que l'entier n est soit pair ou soit impair.

1. Supposons que n soit pair.
   Nous savons que n est divisible par 2, puis $n \cdot (n+1)$ est divisible par 2.
2. Supposons que n soit impair.
   Nous savons que $n+1$ est divisible par 2, puis $n \cdot (n+1)$ est divisible par 2.

Ainsi, dans tous les cas, n est divisible par 2. □

En appliquant le théorème de démonstration par cas, au cas particulier où le but est une disjonction $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, et les deux cas sont φ_1 et $\neg\varphi_1$. Nous obtenons la tautologie suivante :

Théorème 6

La formule $(((\neg\varphi_1) \Rightarrow \varphi_2) \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$ est une tautologie.

Démonstration. Nous vérifions que, pour tout environnement σ que, quelle que soit l'évaluation des formules φ_1, φ_1 et φ_2 sur l'environnement σ, l'évaluation de la formule $(((\neg\varphi_1) \Rightarrow \varphi_2) \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$ donne toujours la valeur tt.

$[\varphi_1]_\sigma$	$[\varphi_2]_\sigma$	$[(\neg\varphi_1)]_\sigma$	$[((\neg\varphi_1) \Rightarrow \varphi_2)]_\sigma$	$[(\varphi_1 \vee \varphi_2)]_\sigma$
ff	ff	tt	ff	ff
ff	tt	tt	tt	tt
tt	ff	ff	tt	tt
tt	tt	ff	tt	tt

$[\varphi_1]_\sigma$	$[\varphi_2]_\sigma$	$[(((\neg\varphi_1) \Rightarrow \varphi_2) \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))]_\sigma$
ff	ff	tt
ff	tt	tt
tt	ff	tt
tt	tt	tt

□