# Ensembles et relations

Marc Chevalier
marc.chevalier@ens.fr

DI ENS

12 septembre 2018

# Brocoli

# Chou-fleur

# Chou rouge

# Ensembles et éléments

**Définition 1** – Ensemble

Un ensemble est une collection non ordonnée et sans répétition d'objets.
Si $a$, $b$, $c$ sont des éléments, nous notons $\{a, b, c\}$ l'ensemble formé des éléments $a$, $b$, et $c$.

# Ensembles et éléments

## Exemple 1

Nous donnons quelques exemples d'ensembles finis :

- $\{\text{bleu}, \text{rouge}\}$,
- l'ensemble $[\![0, 9]\!]$ des chiffres dans le systèmes décimal ;
- l'ensemble vide $\varnothing$ est un ensemble ;

et quelques exemples d'ensembles infinis :

- l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers natures ;
- l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels ;
- l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ;
- l'ensemble $[0; 1]$ des réels compris entre 0 et 1.

# Ensembles et éléments

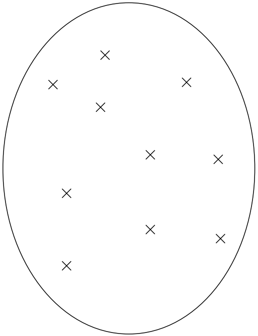

Figure 1 – Un ensemble

# Ensembles et éléments

**Définition 2** – Appartenance

Nous notons :

$$x \in X$$

le fait qu'un objet $x$ soit un élément de l'ensemble $X$.

# Ensembles et éléments

**Exemple 2**

Nous avons :

- bleu $\in$ {bleu, rouge} ;
- jaune $\notin$ {bleu, rouge} ;
- $0 \in \mathbb{N}$ ;
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ ;
- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

# Ensembles et éléments

**Définition 3** – Égalité (axiome d'extensionnalité)

Nous dirons que deux ensembles $X$ et $Y$ sont égaux si et seulement si les deux assertions suivantes sont satisfaites :

1. tout élément de l'ensemble $X$ est un élément de l'ensemble $Y$ ;
2. tout élément de l'ensemble $Y$ est un élément de l'ensemble $X$.

# Ensembles et éléments

**Exemple 3**

Par exemple, nous avons :

- $\{\text{bleu}, \text{rouge}\} = \{\text{rouge}, \text{bleu}\}$ ;
- $\{\text{jaune}, \text{rouge}\} \neq \{\text{rouge}, \text{bleu}\}$.

# Algèbre

**Axiome 1** – Axiome de la réunion

La collection des éléments de $A$ et des éléments de $B$ est un ensemble.

**Définition 4** – Réunion

Nous appelons la réunion de $A$ et $B$ l'ensemble des éléments de $A$ et des éléments de $B$, et nous la notons $A \cup B$.

# Algèbre

## Exemple 4

Par exemple, nous avons :

- $\{1, 2\} \cup \{6, 4\} = ?$ ;
- $\{1, 3, 4\} \cup \{5, 1, 2\} = ?$.

# Algèbre

**Exemple 4**

Par exemple, nous avons :

- $\{1, 2\} \cup \{6, 4\} = \{1, 4, 2, 6\}$ ;
- $\{1, 3, 4\} \cup \{5, 1, 2\} = \{5, 2, 3, 1, 4\}$.

# Algèbre

**Axiome 2** – Axiome de compréhension

Toute collection d'objets tous éléments de $A$ est un ensemble.

**Définition 5** – Partie

Si $X$ est une collection d'objets tous éléments de $A$, nous disons que $X$ est une partie (ou un sous-ensemble) de $A$, ce que nous notons $X \subseteq A$.

# Algèbre

**Proposition 1** – Compréhension

Si $A$ est un ensemble et $P(x)$ un prédicat portant sur les éléments de $A$. Alors la partie de $A$ tel que $P(x)$ est vrai, est un ensemble. Nous la notons :

$$\{x \in A \mid P(x)\}$$

**Exemple 5**

L'ensemble des nombres paires est noté :

$$\{x \in \mathbb{N} \mid 2 \text{ divise } x\}.$$

# Algèbre

**Proposition 2**

La collection des objets qui sont à la fois éléments de l'ensemble $A$ et de l'ensemble $B$ est un ensemble.

Démonstration.
Exercice. □

**Définition 6** – Intersection

Nous appelons intersection de $A$ et de $B$ la collection des objets qui sont à la fois éléments de l'ensemble $A$ et éléments de l'ensemble $B$, et la notons $A \cap B$.

# Algèbre

**Exemple 6**

Par exemple, nous avons :

- $\{1, 2\} \cap \{6, 4\} = ?$ ;
- $\{1, 3, 4\} \cap \{5, 1, 2\} = ?$.

# Algèbre

**Exemple 6**

Par exemple, nous avons :

- $\{1,2\} \cap \{6,4\} = \emptyset$ ;
- $\{1,3,4\} \cap \{5,1,2\} = \{1\}$.

# Algèbre

**Proposition 3**

La collection des objets qui sont dans l'ensemble $A$ sans être dans l'ensemble $B$ est un ensemble.

**Définition 7** – Différence

Nous notons $A \setminus B$ l'ensemble des éléments de l'ensemble $A$ qui ne sont pas des éléments de l'ensemble $B$.

# Algèbre

**Exemple 7**

Par exemple, nous avons :

- $\{1, 2\} \setminus \{6, 4\} = ?$ ;
- $\{6, 4\} \setminus \{1, 2\} = ?$ ;
- $\{1, 3, 4\} \setminus \{5, 1, 2\} = ?$ ;
- $\{5, 1, 2\} \setminus \{1, 3, 4\} = ?$ ;

# Algèbre

**Exemple 7**

Par exemple, nous avons :

- $\{1, 2\} \setminus \{6, 4\} = \{1, 2\}$ ;
- $\{6, 4\} \setminus \{1, 2\} = \{6, 4\}$ ;
- $\{1, 3, 4\} \setminus \{5, 1, 2\} = \{3, 4\}$ ;
- $\{5, 1, 2\} \setminus \{1, 3, 4\} = \{5, 2\}$ ;

**Définition 8** – Complémentaire

Soit $E$ un ensemble et $F$ une partie de $E$. On appelle le complémentaire de $F$ dans $E$ l'ensemble $E \setminus F$.
Le complémentaire de $F$ dans $E$ est noté $\complement_E F$. Si $E$ est clair d'après le contexte, on peut simplement parler du complémentaire de $F$ et le noter $\complement F$.

# Algèbre

**Proposition 4**

La collection des objets qui sont élément de l'ensemble $A$ ou élément de l'ensemble $B$, mais pas les deux, est un ensemble.

**Définition 9** – Différence symétrique

Nous notons $A \Delta B$ l'ensemble des objets qui sont des éléments de l'ensemble $A$ ou des éléments de l'ensemble $B$, mais pas des deux.

# Algèbre

**Exemple 8**

Par exemple, nous avons :

- $\{1, 2\}\Delta\{6, 4\} = ?$ ;
- $\{6, 4\}\Delta\{1, 2\} = ?$ ;
- $\{1, 3, 4\}\Delta\{5, 1, 2\} = ?$ ;
- $\{5, 1, 2\}\Delta\{1, 3, 4\} = ?$ ;

# Algèbre

**Exemple 8**

Par exemple, nous avons :

- $\{1,2\}\Delta\{6,4\} = \{1,2,6,4\}$ ;
- $\{6,4\}\Delta\{1,2\} = \{1,2,6,4\}$ ;
- $\{1,3,4\}\Delta\{5,1,2\} = \{2,3,4,5\}$ ;
- $\{5,1,2\}\Delta\{1,3,4\} = \{2,3,4,5\}$ ;

# Algèbre

**Axiome 3** – Axiome de l'ensemble des parties

La collection de toutes les parties de l'ensemble $A$ est un ensemble.

**Définition 10** – Ensemble des parties

L'ensemble de toutes les parties de l'ensemble $A$ est noté $\mathcal{P}(A)$.

# Algèbre

**Exemple 9**

Par exemple, nous avons :

$$\mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) = \left\{ \vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}} \right\}$$

# Algèbre

**Exemple 9**

Par exemple, nous avons :

$$\mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset, \\ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \\ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \\ \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \\ \{1,2,3,4\} \end{array} \right\}$$

**Proposition 5**

Soit $S$ un ensemble fini avec $n$ éléments. Alors $\mathcal{P}(S)$ est un ensemble fini avec $2^n$ éléments.

**Démonstration.**

Une partie est caractérisée par l'absence, ou la présence de chaque élément. Il y a donc $2^n$ possibilités. □

# Relations binaires

**Définition 11** – Couple

Nous appelons un couple la donné de deux objets $a$ et $b$. Nous notons un tel couple $(a, b)$. Nous appelons $a$ la première coordonnée de $(a, b)$ et $b$ la seconde coordonnée.

**Exemple 10**

- $(1, 2)$
- $(\sqrt{2}, -12)$

# Relations binaires

**Axiome 4**

Soit $A$ et $B$ deux ensembles. La collection des couples dont la première coordonnée est dans l'ensemble $A$ et la deuxième coordonnée est dans l'ensemble $B$ est un ensemble.

**Définition 12** – produit cartésien

$$A \times B = \left\{ (a, b) \,\middle|\, a \in A, b \in B \right\}$$

$$A^2 = A \times A$$

# Relations binaires

**Exemple 11**

- $(1, 2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- $(\sqrt{2}, -12) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$

# Relations binaires

**Définition 13** – Relation binaire

Nous appelons relation binaire entre $A$ et $B$ toute partie de $A \times B$.

$$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow (a, b) \in \mathcal{R}$$

# Relation d'équivalence

**Définition 14** – Relation d'équivalence sur un ensemble

Soit $A$ un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire entre l'ensemble $A$ et lui-même. Nous dirons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble $A$ si et seulement si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

1. (réflexivité) pour tout élément $x \in A$, nous avons : $x\mathcal{R}x$ ;
2. (symétrie) pour toute paire d'éléments $(x, y) \in A^2$ telle que $x\mathcal{R}y$, nous avons : $y\mathcal{R}x$ ;
3. (transitivité) pour toute triplet d'éléments $x, y, z \in A$ tel que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, nous avons : $x\mathcal{R}z$.

# Relation d'équivalence

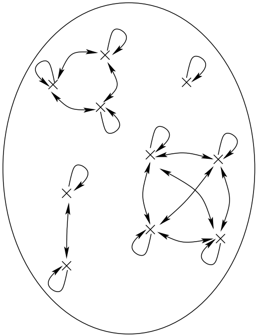

Figure 2 – Une relation d'équivalence

# Relation d'équivalence

**Exemple 12**

Soit $X$ un ensemble.

1. $X^2$ est la relation (grossière), telle que toute paire d'éléments est en relation, est une relation d'équivalence.
2. $\Delta_X := \left\{(x,x) \in X^2 \,\middle|\, x \in X\right\}$, la relation (fine) telle qu'aucune paire d'éléments de $X$ distincts n'est en relation, est une relation d'équivalence.

# Relation d'équivalence

**Exemple 13**

Soit $A$ un ensemble d'êtres humains.

1. La relation qui contient tous et uniquement les couples d'habitants qui sont nés dans la même ville, est une relation d'équivalence.
2. La relation qui contient tous et uniquement les couples d'habitants qui portent un vêtement (n'importe lequel) d'une même couleur, n'est pas une relation d'équivalence.

# Relation d'équivalence

**Exemple 14**

La relation sur $\mathbb{Z}$

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a - b \text{ est un multiple de } 5$$

est une relation d'équivalence.

## Démonstration.

Right now ! Au tableau. $\square$

# Relation d'équivalence

**Exemple 15**

La relation sur $\mathbb{Z}$

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a + b \text{ est pair}$$

est une relation d'équivalence.

## Démonstration.

Right now ! Exercice. $\square$

# Relation d'équivalence

**Exemple 16**

La relation sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow ad = cb$$

est une relation d'équivalence.

## Démonstration.

Right now ! Exercice. $\square$

# Relation d'équivalence

**Définition 15** – Classe d'équivalence

Soit $x \in A$. L'ensemble

$$\{y \in A \mid x\mathcal{R}y\}$$

est appelée la classe d'équivalence de $x$ et est notée $\dot{x}$ ou $\mathrm{cl}\left(x\right)$

# Relation d'équivalence

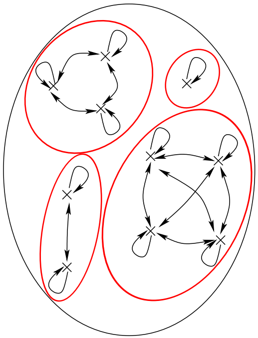

Figure 3 – Les classes d'équivalence

# Relation d'équivalence

**Proposition 6**

Soit $x \in A$, on a
$$x \in \mathrm{cl}\left(x\right)$$

**Proposition 7**

Soit $\left(x, y\right) \in A^2$. $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $\mathrm{cl}\left(x\right) = \mathrm{cl}\left(y\right)$.

**Corollaire 1**

Soit $\left(x, y\right) \in A^2$. $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x \in \mathrm{cl}\left(y\right)$.

# Relation d'équivalence

**Exemple 17**

Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a - b \text{ est un multiple de } 5$$

On a $\mathrm{cl}\,(2) = \{2 + 5k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, 22, \ldots\}$. Plus généralement $\mathrm{cl}\,(n) = \{n + 5k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

## Démonstration.

Right now ! Au tableau. $\square$

# Relation d'équivalence

**Exemple 18**

Soit $\mathcal{R}$, la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow ad = cb$$

$\mathrm{cl}\left((a, b)\right) = \left\{(c, d) \,\middle|\, c = \frac{a}{b}d\right\}$

## Démonstration.

Right now ! Au tableau. $\square$

# Relation d'équivalence

**Exemple 19**

Soit $\mathcal{R}$, la relation sur $\mathbb{R}$

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow |a| = |b|$$

Prouver que c'est une relation d'équivalence. Soit $x \in \mathbb{R}$, déterminer $\mathrm{cl}\,(x)$.

## Démonstration.

Right now ! Exercice. $\square$

# Relation d'équivalence

**Exemple 20**

Soit $\mathcal{R}$, la relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$

$$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a + b \text{ est pair}$$

## Démonstration.

Right now ! Exercice. $\square$

# Relation d'ordre

**Définition 16** – Ordre sur un ensemble

Soit $A$ un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire entre l'ensemble $A$ et lui-même. Nous dirons que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur l'ensemble $A$ si et seulement si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

1. (réflexivité) pour tout élément $x \in A$, nous avons : $x\mathcal{R}x$ ;
2. (antisymétrique) pour toute paire d'éléments $(x, y) \in A^2$ telle que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, nous avons : $x = y$ ;
3. (transitivité) pour toute triplet d'éléments $x, y, z \in A$ tel que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, nous avons : $x\mathcal{R}z$.

# Relation d'ordre

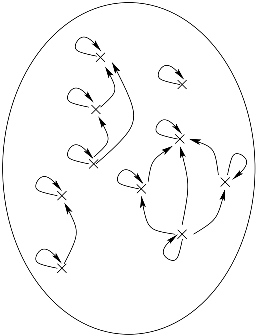

Figure 4 – Une relation d'équivalence

# Relation d'ordre

**Exemple 21**

Soit $X$ un ensemble.

1. La relation $X^2$ qui contient toutes les paires éléments de $X$ n'est pas une relation d'ordre, sauf si $X$ possède au plus un élément.
2. Le relation $\Delta_X := \left\{(x, x) \in X^2 \,\middle|\, x \in X\right\}$ qui contient ne contient aucune paire d'éléments de $X$ distincts, est une relation d'ordre.
3. La relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(X)$ est une relation d'ordre.

# Relation d'ordre

**Remarque 1**

Si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $X$ et $x$ et $y$ deux éléments de $X$, on n'a pas forcément $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$.

**Exemple 22**

La relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ n'est pas totale : $\{1\} \not\subseteq \{2\}$ et $\{2\} \not\subseteq \{1\}$

# Relation d'ordre

**Définition 17**

Un ordre $\mathcal{R}$ sur $X$ est total si pour tout $x$ et $y$ dans $X$, on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$

# Relation d'ordre

**Exemple 23**

La relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ est totale.

# Relation d'ordre

**Définition 18** – Ordre bien fondé

Soit $E$ un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur $E$. On dit que $\mathcal{R}$ est bien fondé s'il n'existe pas de suite strictement décroissante (au sens de $\mathcal{R}$) d'éléments de $E$.

# Relation d'ordre

**Exemple 24**

La relation $\leqslant$ sur $\mathbb{N}$ est bien fondée.

**Exemple 25**

Soit $E$ un ensemble fini. La relation $\subseteq$ sur $\mathcal{P}(E)$ est bien fondée.

# Relation d'ordre

**Définition 19** – Élément extrémal

Soit $E$ un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur $E$. Soit $F \subseteq E$ et $x \in F$.
On dit que $x$ est un élément maximal de $F$ si $F$ ne contient pas d'élément plus grand que $x$.
On dit que $x$ est un élément minimal de $F$ si $F$ ne contient pas d'élément plus petit que $x$.

# Relation d'ordre

**Exemple 26**

Soit $F = \{\{1\}, \{1,2\}, \{2\}, \{4\}\} \subseteq \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$.
$\{1\}$, $\{2\}$ et $\{4\}$ sont des éléments minimaux de $F$ pour la relation d'inclusion.
$\{1,2\}$ et $\{4\}$ sont des éléments maximaux de $F$ pour la relation d'inclusion.

# Relation d'ordre

**Proposition 8**

Soit $E$ un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur $E$. $\mathcal{R}$ est bien fondé si et seulement si toute partie non vide $F$ de $E$ admet un élément minimal.