Prédicats et récurrences

Marc Chevalier
DI ENS

21 septembre 2017

1 Quantificateurs

Dans une classe avec au moins un étudiant, il existe toujours un étudiant dans la classe, tel que si il sort avant la pause, alors tous les étudiants de la classe seront sorti avant la pause. Pour décider si cette phrase est une tautologie, une contradiction, ou ni l'une, ni l'autre, nous rappelons les définitions et les règles de preuves sur les quantificateurs universels. Ces quantificateurs vont nous permettre de raisonner sur des propriétés portant sur des ensembles infinis d'éléments. Dans toute cette partie, nous considérons un ensemble E (infini ou non).

1.1 Définitions

Un prédicat est une formule logique qui contient une ou plusieurs éléments variables (à ne pas confondre avec les variables propositionnelles), ces éléments pouvant varier dans des ensembles. Ce qui donne la définition suivante :

Définition 1 – Prédicat

Un prédicat est formé à partir de prédicat atomique $P(x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n)$, des connecteurs logiques habituels, ainsi que des quantificateurs, que nous allons introduire par la suite.

Exemple 1

Nous donnons maintenant quelques exemples de prédicats :

1. si E est l'ensemble des étudiants de la classe, la phrase :

   « $x \in E$ porte un pull blanc. »

   est un prédicat portant sur les éléments de E.

2. La formule :

$$\text{« } n \in \mathbb{N} \text{ est un nombre premier. »}$$

est un prédicat portant sur les entiers naturels.

Nous introduisons maintenant les quantificateurs. Intuitivement, une propriété quantifiée universellement sur E est vraie lorsqu'elle est satisfaite pour tous les éléments de E. C'est une sorte de conjonction de taille arbitraire (voire infinie). Nous formalisons maintenant cette intuition.

Définition 2 – Quantificateur universel

Soit $P(x)$ un prédicat portant sur les éléments de E. Nous dirons que la propriété $(\forall x \in E, P(x))$ est vraie si et seulement si pour tout élément $x \in E$, $P(x)$ est vrai.

Par contre, une propriété quantifiée existentiellement sur E est vraie lorsqu'elle est satisfaite pour au moins un élément de E. C'est une sorte de disjonction de taille arbitraire (voire infinie). Nous formalisons maintenant cette notion.

Définition 3 – Quantificateur existentiel

Soit $P(x)$ un prédicat portant sur les éléments de E. Nous dirons que la propriété $(\exists x \in E, P(x))$ est vraie si et seulement si il existe un élément $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vrai.

Exemple 2

Soit X l'ensemble de tous les chats qui existent, ont existé, et existeront un jour. La propriété $\forall x \in X, x$ est gris est faux car il existe des chats qui ne sont pas gris.

Exemple 3

La propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Q} \,;$$

est vraie, car tout entier naturel est un nombre rationnel.

Exemple 4

La propriété suivante :

$$\forall q \in \mathbb{Q}, q \in \mathbb{N}$$

est fausse car $\frac{1}{2}$ est un nombre rationnel qui n'est pas un nombre entier.

Exemple 5

Soit $P(x)$ un prédicat portant sur les éléments de E. La propriété

$$\exists x \in E, (P(x) \implies \forall y \in E, P(y))$$

est satisfaite si et seulement si l'ensemble E n'est pas vide.

Démonstration. Montrons les deux implications.

1. Si la propriété $\exists x \in E, (P(x) \implies \forall y \in E, P(y))$ est une tautologie, alors, nécessairement E est non vide.
2. Si E n'est pas vide. Prenons t un élément de E. Deux cas :
   (a) Si $\forall y \in E, P(y)$, alors la propriété $P(t) \implies \forall y \in E, P(y)$ est vraie. Donc la propriété $\exists x \in E, (P(x) \implies \forall y \in E, P(y))$ est vraie.
   (b) Sinon, soit t un élément de E tel que $P(t)$ soit faux (t existe car E n'est pas vide). La propriété $P(t) \implies \forall y \in E, P(y)$ est vraie. Donc la propriété $\exists x \in E, (P(x) \implies \forall y \in E, P(y))$ est vraie.

   Ainsi, la propriété $\exists x \in E, (P(x) \implies \forall y \in E, P(y))$ est vraie.

□

Exemple 6

Soit $P(x)$ un prédicat portant sur les éléments de E. La propriété

$$(\forall x \in E, P(x)) \Rightarrow (\exists y \in E, P(y))$$

est satisfaite si et seulement si l'ensemble E n'est pas vide.

Démonstration. Montrons le sens réciproque et la contraposée.

— Réciproque : On suppose E non vide. Soit $e \in E$. On a $P(e)$ puisque $\forall x \in E, P(x)$ donc $\exists x \in E, P(x)$.

— Contraposée : On suppose E vide. Donc la propriété $(\forall x \in E, P(x))$ est vraie et $(\exists y \in E, P(y))$ est fausse. Donc l'implication est fausse.

□

Proposition 1

Soit P un prédicat portant sur les éléments de l'ensemble vide. Alors la propriété :

$$\forall x \in \emptyset, P(x).$$

est satisfaite.

Démonstration. L'ensemble vide n'a pas d'élément.

Donc, $P(x)$ est vrai pour tous les éléments de $\emptyset$. □

Proposition 2

Soit P un prédicat portant sur les éléments de l'ensemble vide. Alors la propriété :

$$\exists x \in \emptyset, P(x).$$

est fausse.

Démonstration. Supposons que la propriété soit vraie. Il existerait donc un élément $t \in \emptyset$ tel que $P(t)$ soit vraie. En particulier, $t \in \emptyset$, ce qui est absurde car l'ensemble $\emptyset$ n'a pas d'élément. □

Proposition 3

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

— $(\forall x \in X, P(x))$;

— $(\neg(\exists x \in X, (\neg P(x))))$.

Démonstration.

1. Supposons que pour tout élément de x de X, la propriété $P(x)$ est vraie. Alors pour aucun élément x de X, la propriété $P(x)$ est fausse. Et donc, il n'existe pas d'éléments de x de X tel que la propriété $P(x)$ soit fausse.
2. Réciproquement, supposons qu'il n'existe pas d'éléments de x de X tel que la propriété $P(x)$ soit fausse. Soit x un élément de X, on sait que $P(x)$ n'est pas fausse. Donc $P(x)$ est vraie.

□

Proposition 4

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

— $(\exists x \in X, P(x))$;

— $(\neg(\forall x \in X, (\neg(P(x)))))$.

Démonstration. Par contraposée de la propriété 1.1. □

1.2 Preuves

Raisonner sur des formules avec des quantificateurs est plus compliqué, surtout lorsqu'ils portent sur des éléments d'ensembles infinis. Il n'est plus possible de passer par des tables de vérité (ou alors, il en faudrait de taille infinie).

L'axiome de généralisation permet de prouver une formule quantifiée universellement. Le principe de déduction est le suivant. Pour prouver une formule du type $\forall x \in E, P(x)$, nous prenons un élément $e \in E$ arbitraire, et nous prouvons $P(e)$ sans utiliser aucune propriété spécifique de l'élément e. Nous en déduisons alors que $P(x)$ est satisfait quelque soit l'élément $x \in E$ de l'ensemble E.

Axiome 1 (Généralisation ou abstraction).

Si nous pouvons prouver la propriété $P(t)$ pour $t \in E$ arbitraire (ie sans utiliser de propriété spécifique de t), alors nous pouvons en déduire la propriété $\forall x \in E, P(x)$.

La preuve d'une une formule quantifiée universellement est générique et peut s'appliquer à n'importe quel élément $e \in E$ de l'ensemble E en particulier.

Axiome 2 (Concrétisation).

Si nous pouvons prouver une propriété $\forall x \in E, P(x)$, alors nous pouvons prouver $P(x)$ pour n'importe quel élément $x \in E$ de l'ensemble E.

Exemple 7

La propriété suivante :

$$(\forall x \in E, P(x)) \Rightarrow (\forall x \in E, (P(x) \vee P(x)))$$

est vraie.

Pour prouver une formule quantifiée existentiellement, il nous suffit de trouver un élément témoin tel que la propriété soit satisfaire pour cet élément. Contrairement à l'axiome 1 nous pouvons utiliser les propriétés spécifiques de notre élément témoin.

Axiome 3 (Témoin (version 1))**.**

Si nous pouvons prouver la propriété $P(e)$ pour un élément $e \in E$ en particulier, alors nous pouvons en déduire la propriété $\exists x \in E, P(x)$.

Lorsqu'une formule quantifiée existentiellement est vraie, nous pouvons choisir un élément témoin qui satisfait cette formule, et l'utiliser dans des preuves ultérieurs. Ce raisonnement est formalisé par l'axiome suivant :

Axiome 4 (Témoin (version 2))**.**

Si nous pouvons prouver la propriété $\exists x \in E, P(x)$, et si à partir d'un élément $t \in E$ générique nous pouvons prouver $P(t) \Rightarrow R$ sans utiliser de propriétés particulière de t, alors nous pouvons déduire R.

Exemple 8

La propriété suivante :

$$\exists x, P(x) \Rightarrow \exists x, P(x) \wedge P(x)$$

est vraie.

Exemple 9

Montrons que le double de tout réel positif ou nul, est un réel positif ou nul.
Soit $x \in \mathbb{R}^+$,

nous avons :

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant x \\ \text{et } 0 &\leqslant x \end{aligned}$$

D'où :

$$0 + 0 \leqslant x + x.$$

Puis :

$$0 \leqslant 2 \cdot x.$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^+, 2 \cdot x \in \mathbb{R}^+$.

Exemple 10

Nous donnons l'exemple d'une preuve erronée. Montrons que le prédécesseur de tout entier naturel est un entier naturel. Le prédecesseur de l'entier naturel 1 est 0. Or 0 est un entier naturel donc $\forall n \in \mathbb{N}, (n-1) \in \mathbb{N}$. Ce raisonnement est bien entendu erroné. Nous avons en réalité montrer que :

$$\exists n \in \mathbb{N}, (n-1) \in \mathbb{N}$$

Remarque 1

Nous retiendrons que pour prouver une formule quantifiée universellement, il faut faire un raisonnement sur un élément générique qui n'utilise pas les propriétés spécifiques de l'élément. Alors que pour montrer une formule quantifiée existentiellement il nous suffit de construire un exemple.
Bien entendu, pour réfuter une propriété universelle, il nous suffit de construire un contre-exemple, alors que pour réfuter une propriété existentielle, il nous faut raisonner sur un élément générique et montrer que le prédicat est faux sur cet élément (sans utiliser les propriétés particulières de cet élément).

2 Schéma de récurrence

Le syndicat des étudiants oisifs a un nouveau programme : « Désormais, le lendemain des jours de vacances sera un jour de vacances. ». Les autres étudiants étaient sous le charme et tout le monde était heureux quand le programme fut accepté, avec réticence, par la direction des études. Cependant, après trois ans sans vacances, les élèves commençaient à déchanter. Le syndicat des étudiants malins, proposa une nouvelle règle : « le lendemain de l'adoption de cette nouvelle règle sera un jour de vacances ». Un jour de vacances, pas de soucis dît la direction. Et l'université ferma définitivement ses portes.

Nous allons maintenant réviser les bases de la récurrence et de l'induction.

2.1 Récurrence simple

Une récurrence simple consiste à prouver qu'une propriété est vraie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, en montrant qu'elle est vrai l'entier 0, et que si elle est vraie pour un entier n_0 donné, alors elle est vrai également pour l'entier $n_0 + 1$.

Théorème 1 – Principe de récurrence simple

Soit $P(n)$ un prédicat portant sur une variable n entière.
Si les propriétés $P(0)$ et si $[\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)]$ sont vraies, alors la propriété $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

Démonstration. En exercice □

Exemple 11

La somme des n premiers entiers est $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Démonstration. En exercice □

2.2 Récurrence forte

Théorème 2 – Principe de récurrence forte

Soit $P(n)$ un prédicat portant sur une variable n entière.
Si la propriété $\forall n_0, (\forall n \in [\![0, n_0 - 1]\!], P(n)) \Rightarrow P(n_0)$ est vraie, alors la propriété $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

Démonstration. En exercice □

Exemple 12

Tout nombre supérieur à 2 possède un diviseur premier supérieur à 2.

2.3 Définition par récurrence

Définition 4 – Suites

Une famille d'éléments indexés par l'ensemble $\mathbb{N}$ est appelé une suite. L'ensemble des suites de d'éléments de l'ensemble A est noté $A^{\mathbb{N}}$.

Théorème 3 – Définition par récurrence

Soit E un ensemble. Soit $e \in E$ un élément de E et $f \in E \to E$ une fonction de E dans E.
Alors il existe une et unique suite $g \in E^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{cases} g_0 = e \\ g_{n+1} = f(g_n), \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Démonstration. En exercice □

Exemple 13 – Suite arithmétique

Soit $i, r \in \mathbb{R}$ deux nombres réels. Nous appelons la suite arithmétique de valeur initiale i et de raison r la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de réels définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = i, \\ u_{n+1} = u_n + r, \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Nous pouvons montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = i + n \cdot r.$$

Démonstration. En exercice □

Exemple 14 – Suite géométrique

Nous appelons la suite géométrique de valeur initiale i et de raison r la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de réels définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = i, \\ u_{n+1} = r \cdot u_n, \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Nous pouvons montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = i \cdot r^n.$$

Démonstration. En exercice $\square$

Exemple 15 – Suite arithmético-géométrique

Nous appelons la suite arithmético-géométrique de paramètres i, a, et b la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de réels définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = i, \\ u_{n+1} = a{\cdot}u_n + b, \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Lorsque $a = 1$, nous pouvons montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = i + n \cdot b.$$

Sinon, nous pouvons montrer que,

$$u_n = a^n \cdot \left(i - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}.$$

Démonstration. En exercice. $\square$

Exemple 16 – suite des itérées d'une fonction

Nous considérons $f : E \to E$ une fonction de E dans E. Nous appelons la suite des itérées de f la suite de fonction $(g_n) \in \left(E^E\right)^{\mathbb{N}}$ qui vérifie les condition suivantes :

$$\begin{cases} g_0 = Id_E, \\ g_{n+1} = f \circ g_n \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi notée $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.