Fonctions

Marc CHEVALIER
DI ENS

20 septembre 2018

Définition 1 – Relation fonctionnelle

Nous disons qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ entre un ensemble A et un ensemble B est une relation fonctionnelle, si et seulement si pour tout élément $a \in A$, pour tout élément $b, b' \in B$, $a\mathcal{R}b$ et $a\mathcal{R}b'$ alors $b = b'$.

Définition 2 – Relation applicative

Nous disons qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ entre un ensemble A et un ensemble B est une relation applicative, si et seulement si c'est une relation fonction et que pour tout élément $a \in A$ dans l'ensemble A, il existe un élément $b \in B$ dans l'ensemble B, tel que $a\mathcal{R}b$.

Définition 3 – Fonctions

Une fonction est une paire $(A, B, \mathcal{R})$ tel que A et B soient deux ensembles et $\mathcal{R}$ est une relation fonctionnelle entre A et B.
Nous appelons l'ensemble A le domaine de définition de la fonction $(A, B, \mathcal{R})$, l'ensemble B le codomaine de la fonction $(A, B, \mathcal{R})$, et la relation binaire $\mathcal{R}$ le graphe de la fonction $(A, B, \mathcal{R})$.

Proposition 1

Soit A et B deux ensembles, la collection des fonctions entre l'ensemble A et l'ensemble B est un ensemble. Nous notons cet ensemble B^A.

Notation 1

Lorsque $f := (A, B, \mathcal{R})$ est une fonction, nous notons $b = f(a)$ pour dire que l'élément a de l'ensemble A et l'élément b de l'ensemble B sont en relation (pour $\mathcal{R}$).

Notation 2

Une fonction f entre l'ensemble A et l'ensemble B peut être noté de la manière suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \to & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$$

Définition 4 – Identité

Soit A un ensemble. La fonction suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} A & \to & A \\ a & \mapsto & a. \end{array} \right.$$

est bien définie. Nous notons cette fonction Id_A.

Définition 5 – Égalité

Deux fonctions $f := (A, B, \mathcal{R})$ et $f' := (A', B', \mathcal{R}')$ sont égales si et seulement si les ensembles A et A' sont égaux, les ensembles B et B' sont égaux, et les ensemble $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont égaux.

Proposition 2

Deux fonctions $f := (A, B, \mathcal{R})$ et $f' := (A', B', \mathcal{R}')$ sont égales si et seulement si les ensembles A et A' sont égaux, les ensembles B et B' sont égaux, et pour tout élément de A, nous avons $f(a) = f'(a)$.

Définition 6 – Composition

Soient A, B, et C trois ensembles et soient f une fonction entre l'ensemble A et l'ensemble B et g une fonction entre l'ensemble B et l'ensemble C. Alors la fonction :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} A & \to & C \\ a & \mapsto & g(f(a)) \end{array} \right.$$

est bien définie. Nous notons cette fonction $g \circ f$.

Soient A et B deux ensembles. Soit f une fonction entre l'ensemble A et l'ensemble B.

Définition 7 – Injection

Nous disons que f est une injection si et seulement si pour toute paire d'éléments $(a, a') \in A^2$, on a : $f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$.

Proposition 3

Soit $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

Proposition 4

Soit A, B et C des ensembles et $f : A \to B$ et $g : B \to C$. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

Définition 8 – Surjection

Nous disons que f est une surjection si et seulement si pour tout élément $b \in B$ de l'ensemble B, il existe un élément $a \in A$ tel que $f(a) = b$.

Proposition 5

Soit $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

Proposition 6

Soit A, B et C des ensembles et $f : A \to B$ et $g : B \to C$. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Définition 9 – Bijection

Une fonction qui est à la fois injective et surjective est une bijection.

Proposition 7

La fonction f est bijective si et seulement si, pour tout élément $b \in B$ de l'ensemble B, il existe un unique élément $a \in A$ de l'ensemble A tel que $b = f(a)$.

Proposition 8

Notons $f := (A, B, \mathcal{R})$ et supposons que f est une bijection. Alors le triplet $(B, A, \mathcal{S})$, où la relation $\mathcal{S}$ entre B et A est définie par :

$$b\mathcal{S}a :\Leftrightarrow a\mathcal{R}b$$

est une fonction bijective entre l'ensemble B et l'ensemble A.
Nous appelons cette fonction l'inverse (ou bijection réciproque) de f, et la notons f^{-1}.

Proposition 9

Les deux propriétés suivantes sont vérifiées :
- $(f^{-1} \circ f) = Id_A$;
- $(f \circ f^{-1}) = Id_B$.

Corollaire 10

Soit $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

Corollaire 11

Soit A, B et C des ensembles et $f : A \to B$ et $g : B \to C$. On suppose $g \circ f$ bijective, alors f est injective et g surjective.

Proposition 12

Soit g une fonction de l'ensemble B dans l'ensemble A.
Si $g \circ f = Id_A$ et $f \circ g = Id_B$, alors f est bijective et son inverse est g.

Proposition 13

Soit f une bijection de A dans B et g une bijection de B dans A.
Si $g \circ f = Id_A$ ou $f \circ g = Id_B$, alors g est la bijection réciproque de f.

Proposition 14

Soit $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. On suppose que f et g sont bijectives. La bijection réciproque de $g \circ f$ est $f^{-1} \circ g^{-1}$.

Remarque 1

Il existe des fonctions f et g tel que $g \circ f = Id_A$ mais où f et g ne sont pas bijectives. Toujours le même exemple fait l'affaire.