Examen de mathématiques

1 Logique propositionnelle

Soit ψ la formule $\Big((A \wedge B) \vee \big((\neg A) \wedge B\big)\Big)$.

1. Écrire la table de vérité de ψ. Je n'ai pas besoin de tous les intermédiaires, mais si c'est faux, ça fera moins de points.
2. ψ est-elle une tautologie ?
3. ψ est-elle une contradiction ?
4. Donner une formule ζ sémantiquement équivalente à ψ ($\psi \equiv \zeta$) et beaucoup plus simple !

2 Récurrence

On va montrer dans cet exercice que les développements limités chers aux physiciens sont à prendre avec d'infinies précautions en exhibant un cas qui semble très régulier mais qui ne marche pas du tout.

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Cette fonction est représentée sur la figure 1.

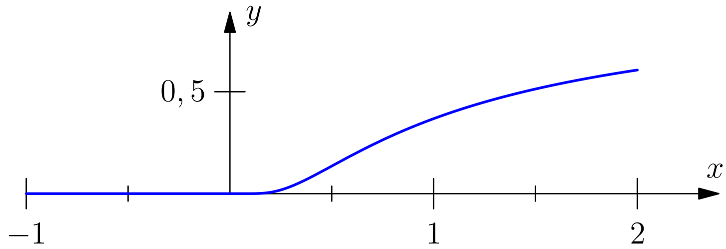

FIGURE 1 – Courbe représentative de f

Nous allons étudier le recollement en 0 pour prouver qu'il est parfaitement régulier, comme la courbe le laisse conjecturer.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ème de f. On rappelle que $f^{(0)} = f$.

$$f^{(n)} = \begin{cases} f & \text{si } n = 0 \\ f^{(n-1)\prime} & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour aller plus vite, on admet quelques résultats :

— la fonction $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$;

— $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{x^n} = 0$ (l'exponentielle gagne devant les polynômes).

On pose $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de polynômes définie par

$$\begin{cases} P_1(x) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) - (2nx - 1)P_n(x) \end{cases}$$

On ne cherchera pas à exprimer les P_n explicitement.

1. Montrer que le prédicat A_n : « $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f^{(n)}(x) = P_n(x)\frac{\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{x^{2n}}$ » est vrai sur $\mathbb{N}^*$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f^{(n)}(x) = 0$.

Toutes les dérivées de f sont nulles en 0 à droite et à gauche. f est donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Cependant, comme toutes les dérivées en 0 de f sont nulles, un développement limité de f autour de 0 ne sera que 0. f s'approxime donc très mal par une série de TAYLOR, et augmenter l'ordre ne change rien. On dit que f n'est pas analytique. Bien que beaucoup de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ usuelles soient analytiques, l'argument « la fonction est $\mathcal{C}^\infty$ » n'est pas suffisant pour que les développements limités fournissent une bonne approximation.

3 Relations

Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$(a, b) \,\mathcal{R}\, (c, d) \text{ ssi } a = c$$

1. Prouver que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$.

4 Fonctions

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

1. f est elle injective ? Surjective ? Bijective ?
2. Restreindre l'ensemble de départ ou d'arrivée de f pour rendre f bijective.