Examen de mathématiques

1 Logique propositionnelle

Soit ψ la formule $\big((A \wedge B) \vee ((\neg A) \wedge B)\big)$.

1. Écrire la table de vérité de ψ. Je n'ai pas besoin de tous les intermédiaires, mais si c'est faux, ça fera moins de points.

Solution:

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	$\big[(A \wedge B)\big]_\sigma$	$\big[(\neg A)\big]_\sigma$	$\Big[((\neg A) \wedge B)\Big]_\sigma$	$[\psi]_\sigma$
ff	ff	ff	tt	ff	ff
ff	tt	ff	tt	tt	tt
tt	ff	ff	ff	ff	ff
tt	tt	tt	ff	ff	tt

2. ψ est-elle une tautologie ?

Solution: Non : l'environnement

$$\begin{aligned} A &\mapsto ff \\ B &\mapsto ff \end{aligned}$$

rend la formule fausse.

3. ψ est-elle une contradiction ?

Solution: Non : l'environnement

$$\begin{aligned} A &\mapsto tt \\ B &\mapsto tt \end{aligned}$$

rend la formule vraie.

4. Donner une formule ζ sémantiquement équivalente à ψ ($\psi \equiv \zeta$) et beaucoup plus simple !

Solution: $\zeta = B$ est la meilleure possible.

2 Récurrence

On va montrer dans cet exercice que les développements limités chers aux physiciens sont à prendre avec d'infinies précautions en exhibant un cas qui semble très régulier mais qui ne marche pas du tout.

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Cette fonction est représentée sur la figure 1.

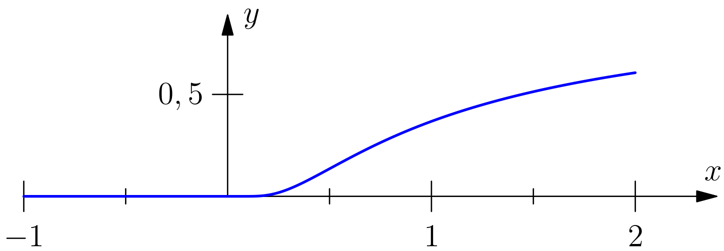

FIGURE 1 – Courbe représentative de f

Nous allons étudier le recollement en 0 pour prouver qu'il est parfaitement régulier, comme la courbe le laisse conjecturer.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ème de f. On rappelle que $f^{(0)} = f$.

$$f^{(n)} = \begin{cases} f & \text{si } n = 0 \\ f^{(n-1)\prime} & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour aller plus vite, on admet quelques résultats :

— la fonction $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$;

— $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{x^n} = 0$ (l'exponentielle gagne devant les polynômes).

On pose $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de polynômes définie par

$$\begin{cases} P_1(x) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) - (2nx - 1) P_n(x) \end{cases}$$

On ne cherchera pas à exprimer les P_n explicitement.

1. Montrer que le prédicat A_n : « $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f^{(n)}(x) = P_n(x) \frac{\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{x^{2n}}$ » est vrai sur $\mathbb{N}^*$.

Solution: Prouvons A_n par récurrence sur $\mathbb{N}^*$.

- Initialisation. Pour $n = 1$. On a $f' = x \mapsto \frac{\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{x^2}$. D'où A_1.
- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que A_n est vrai. Prouvons A_{n+1}.
  Car on a admis que c'était faisable, on dérive $f^{(n)}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
  On a donc

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \left(P_n(x)\frac{\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{x^{2n}}\right)' \\
&= P_n(x)\left(\frac{\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{x^{2n}}\right)' + P_n'(x)\frac{\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{x^{2n}} \\
&= P_n(x)\frac{\exp\left(-\frac{1}{x}\right)' x^{2n} - \exp\left(-\frac{1}{x}\right)2nx^{2n-1}}{x^{4n}} + P_n'(x)\frac{\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{x^{2n}} \\
&= P_n(x)\frac{\frac{\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{x^2} x^{2n} - \exp\left(-\frac{1}{x}\right)2nx^{2n-1}}{x^{4n}} + P_n'(x)\frac{\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{x^{2n}} \\
&= P_n(x)\frac{\exp\left(-\frac{1}{x}\right) x^{2n-2} - \exp\left(-\frac{1}{x}\right)2nx^{2n-1}}{x^{4n}} + P_n'(x)\frac{\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{x^{2n}} \\
&= P_n(x)\frac{\exp\left(-\frac{1}{x}\right) - \exp\left(-\frac{1}{x}\right)2nx}{x^{2n+2}} + P_n'(x)\frac{\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{x^{2n}} \\
&= P_n(x)\frac{(1-2nx)\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{x^{2n+2}} + P_n'(x)\frac{\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{x^{2n}} \\
&= \left(-P_n(x)\frac{(2nx-1)}{x^{2n+2}} + x^2P_n'(x)\frac{1}{x^{2n+2}}\right)\exp\left(-\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{x^2P_n'(x) - (2nx-1)P_n(x)}{x^{2(n+1)}}\exp\left(-\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)}}\exp\left(-\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n$.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \lim\limits_{x\to 0^+} f^{(n)}(x) = 0$.

Solution: Soit $n \in \mathbb{N}$. Sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a $f^{(n)}(x) = P_n(x)\frac{\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{x^{2n}}$, or on sait que $\forall m \in \mathbb{N}, \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{x^m} = 0$ et que la limite d'un polynôme en un point de $\mathbb{R}$

est un réel, donc $\forall n \in \mathbb{N}, \lim\limits_{x \to 0^+} f^{(n)}(x) = 0$.

Toutes les dérivées de f sont nulles en 0 à droite et à gauche. f est donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Cependant, comme toutes les dérivées en 0 de f sont nulles, un développement limité de f autour de 0 ne sera que 0. f s'approxime donc très mal par une série de TAYLOR, et augmenter l'ordre ne change rien. On dit que f n'est pas analytique. Bien que beaucoup de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ usuelles soient analytiques, l'argument « la fonction est $\mathcal{C}^\infty$ » n'est pas suffisant pour que les développements limités fournissent une bonne approximation.

3 Relations

Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$(a, b) \,\mathcal{R}\, (c, d) \text{ ssi } a = c$$

1. Prouver que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$.

Solution:
- Réflexivité. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a $x = x$. Donc $(x, y) \,\mathcal{R}\, (x, y)$.
- Symétrie. Soit $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$. On suppose $(x, y) \,\mathcal{R}\, (x', y')$. On a donc $x = x'$, donc $x' = x$. Donc $(x', y') \,\mathcal{R}\, (x, y)$.
- Transitivité. Soit $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{R}^2$. On suppose $(x, y) \,\mathcal{R}\, (x', y')$ et $(x', y') \,\mathcal{R}\, (x'', y'')$. On a donc $x = x'$ et $x' = x''$. Donc $x = x''$, puis $(x, y) \,\mathcal{R}\, (x'', y'')$.

4 Fonctions

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

1. f est elle injective ? Surjective ? Bijective ?

Solution: Évidemment injective. Pas surjective car -1 n'a pas d'antécédent.

2. Restreindre l'ensemble de départ ou d'arrivée de f pour rendre f bijective.

Solution: Il suffit de restreindre l'ensemble d'arrivée à $\mathbb{R}^+$. L'étudiant taquin aurait pû également restreindre f en une fonction de $\{0\} \to \{0\}$, par exemple. Ou encore, de $\emptyset \to \emptyset$.